Marit Helene Gladhaug, NHH

BED4 : Sammendrag

Læringsutbytte :

Studentene skal ved fullført emne kunne :

- formulere beslutningsproblemer matematisk og implementere modellen ved hjelp av dataverktøy
- være i stand til grafisk å løse og gjøre følsomhets-analyse for et LP-problem med to beslutningsvariabler
- anvende resultater fra sensitivitetsrapporter for LP-problemer, blant annet skyggepriser og slakkverdier, i økonomiske analyser
- bruke heltallsvariabler til å modellere diskrete valg, for eksempel enten/eller-beslutninger
- kjenne til begrensningsmessige problemer knyttet til analyse av heltallsmodeller og ikke-lineære modeller
- avgjøre når det er nødvendig å bruke heltalls-modeller eller ikke-lineære modeller
- kjenne til, og kunne bruke grunnleggende modeller for beregning av prognoser, herunder modeller som tar hensyn til trend- og sesongvariasjoner
- bruke simuleringsmodeller til å kvantifisere konsekvenser av beslutninger under usikkerhet
- beregne og forstå konfidensintervaller for estimater fra simuleringsmodeller

- kjenne til de mest sentrale beslutningskriterier for analyse av beslutningssituasjoner under usikkerhet, herunder modeller som tar hensyn til ulike typer risikoholdning
- kunne anvende beslutningstrær til å analysere enkle beslutningsproblemer med forventet verdi som beslutningskriterium
- forstå og kunne beregne verdien av perfekt/imperfekt informasjon med utgangspunkt i forventet verdi som beslutningskriterium

Kurset består av 9 forelesninger:

1: LP-modeller - Formulering og grafisk løsning
2: Implementering av LP-modeller i regneark
3: LP og følsomhetsanalyser + skyggepriser
4: Enten/eller-beslutninger og heltallsvariabler
5: Ikke-lineære beslutningsmodeller
6: Simulering
7: Beslutningsanalyse
8: Tidsserieprognoser
9: Oppsummering

Marit Helene Gladhaug, NHH

Forelesning 1: LP-modeller - Formulering og grafisk løsning

Gode beslutninger vs. gode resultater/utfall

Gode beslutninger gir ikke alltid de ønskede resultatene. En strukturert, modelltilnærming til beslutningsprosesser hjelper oss til å ta gode beslutninger, men kan ikke garantere gode resultater.

		Resultat/utfall: Godt	Resultat/utfall: Dårlig
Beslutning	God	Fortjent suksess	Uflaks
Beslutning	Dårlig	Flaks/Dumb luck	Poetisk rettferdighet

Elementer i optimeringsmodeller

- Beslutninger
- Begrensninger
- Målsetninger

Optimeringsmodeller på generell form

$$\text{MAX eller MIN: } f_0(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)$$

$$\text{Gitt at: } \begin{aligned} f_1(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) &\leq b_1 \\ f_k(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) &\geq b_k \\ f_m(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n) &= b_m \end{aligned}$$

Et lineært programmeringsproblem (LP-problem) er en optimeringsmodell der <u>alle</u> funksjonene er <u>lineære</u>.

LP-modeller

MAX eller MIN : $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \ldots + c_n X_n$

Gitt at : $a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1n} X_n \leq b_1$

$a_{k1} X_1 + a_{k2} X_2 + \ldots + a_{kn} X_n \geq b_K$

$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mn} X_n = b_M$

Merk : tre typer begrensninger : $\leq$

$\geq$

$=$

Eksempel på LP-modell

Blue Ridge Hot Tubs produserer to typer boblebad: Aqua-Spa og Hydro-Lux.

	Aqua-Spa	Hydro-Lux
Pumper	1	1
Arbeid	9 timer	16 timer
Rør	12 fot	16 fot
DB per stykk	\$350	\$300

Tilgjengelige ressurser er :

200 pumper

1566 arbeidstimer

2880 fot rør

Marit Helene Gladhaug, NHH

Formulering av LP-modeller (5 steg)

Steg 1: Forstå problemet
Vi ønsker å maksimere totalt dekningsbidrag gitt at vi holder oss innenfor de tilgjengelige ressursene vi har

Steg 2: Identifiser beslutningsvariablene

X_1 = antall Aqua-Spa som skal produseres
X_2 = antall Hydro-Lux som skal produseres

Steg 3: Skriv målfunksjonen som en lineær kombinasjon av beslutningsvariablene

$$\text{MAX}: \quad 350X_1 + 300X_2$$

Steg 4: Skriv begrensningene som lineære kombinasjoner av beslutningsvariablene

$1X_1 + 1X_2 \leq 900$ Pumper
$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$ Arbeid
$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$ Rør

Steg 5: Identifiser øvre og nedre grense for beslutningsvariablene

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

Ingen øvre grense i dette tilfellet.

Oppsummering av LP-modellen for Blue Ridge Hot Tubs

MAX : $350X_1 + 300X_2$

Gitt at :

$1X_1 + 1X_2 \leq 200$ Pumper

$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$ Arbeid

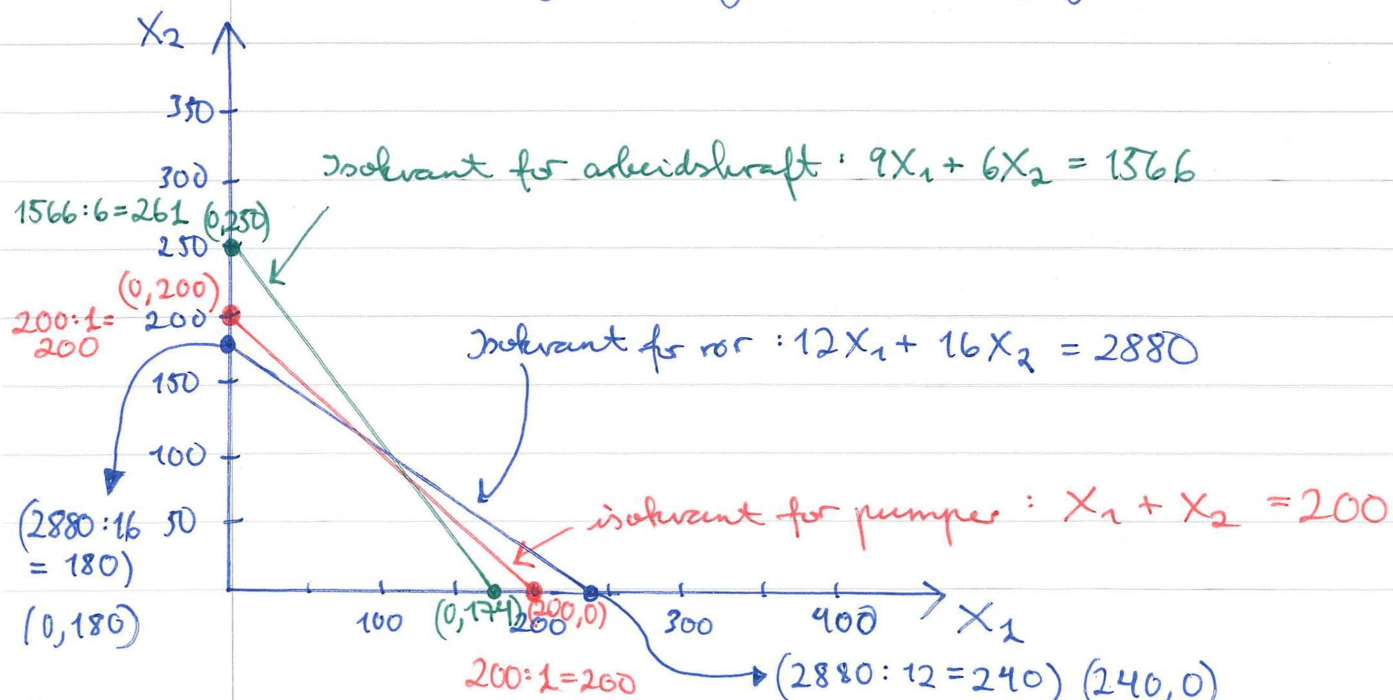
$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$ Rør

$\left.\begin{array}{l} X_1 \geq 0 \\ X_2 \geq 0 \end{array}\right\}$ Ikke-negativitet

Grafisk løsning av LP-modeller

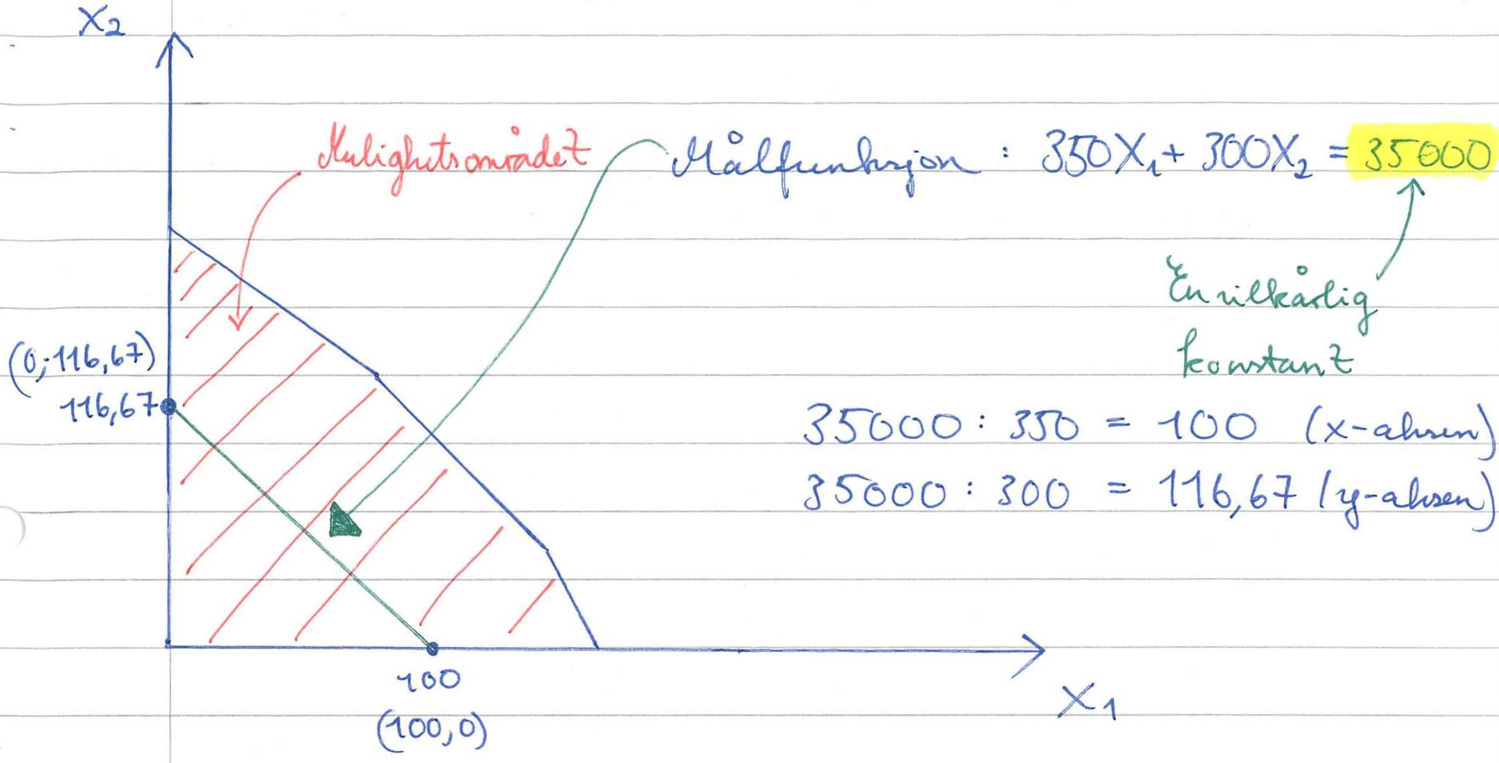
- Begrensningene i en LP-modell definerer mulighetsområdet
- Det beste punktet i mulighetsområdet er den optimale løsningen til modellen
- For LP-modeller med to variabler kan vi lett plotte mulighetsområdet og finne den optimale løsningen.

Plotter begrensningene i en figur



Marit Helene Gladhaug, NHH

Plotter en nivåkurve for målfunksjonen (isobidragslinje)

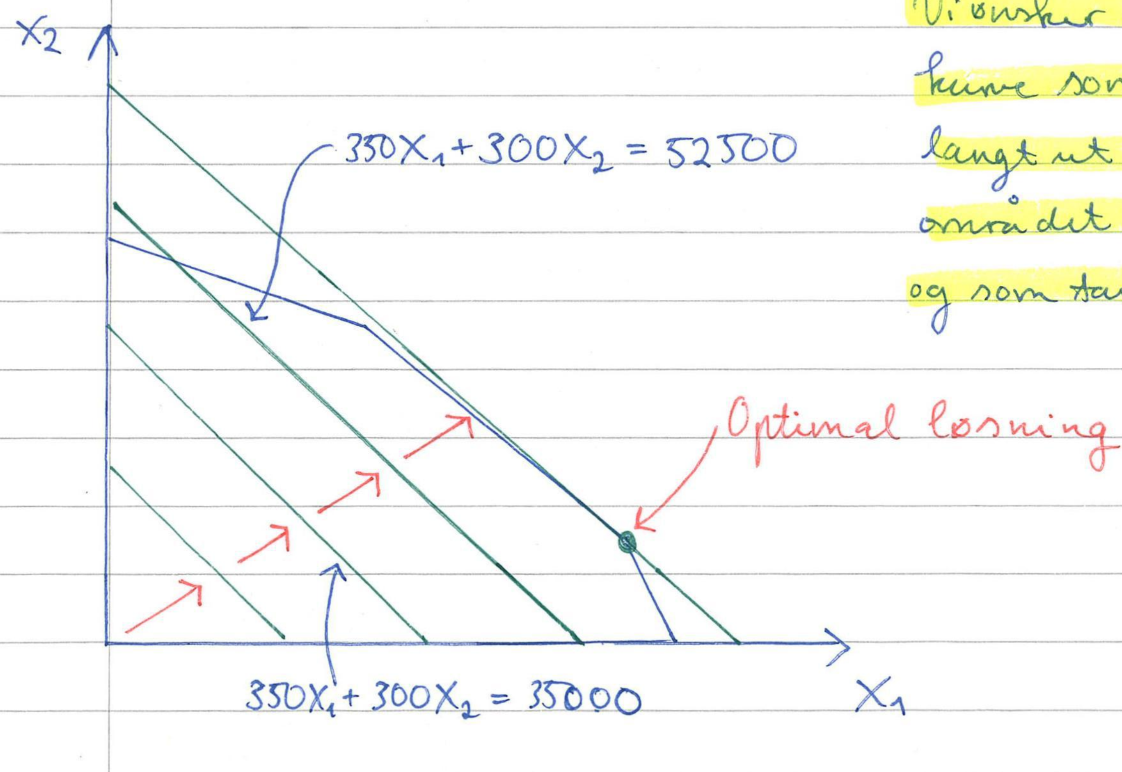


En vilkårlig konstant

$35000 : 350 = 100$ (x-aksen)

$35000 : 300 = 116,67$ (y-aksen)

Flere nivåkurver



Vi ønsker å en nivåkurve som kommer så langt ut i mulighetsområdet som mulig, og som tangerer et hjørne.

Merk: Nivåkurvene er parallelle fordi de har det samme stigningstallet (gitt fra målfunksjonen)

Stigningstall: $\dfrac{\text{Målfunksjonskoeffisient til } X_1}{\text{Målfunksjonskoeffisient til } X_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

Beregner den optimale løsningen

Den optimale løsningen ligger i skjæringspunktet mellom isokvantene for pumper og arbeidskraft. I dette punktet er :

$$\left.\begin{aligned} X_1 + X_2 &= 200 \quad (1) \\ \text{og} \quad 9X_1 + 6X_2 &= 1566 \quad (2) \end{aligned}\right\} \text{Ligningssett med to ukjente, } X_1 \text{ og } X_2$$

Fra (1) har vi $\quad X_2 = 200 - X_1 \quad (3)$

Erstatter X_2 i (2) med (3) og får

$$9X_1 + 6(200 - X_1) = 1566$$

som kan forenkles til $X_1 = 122$

$$X_2 = 200 - 122 = 78$$

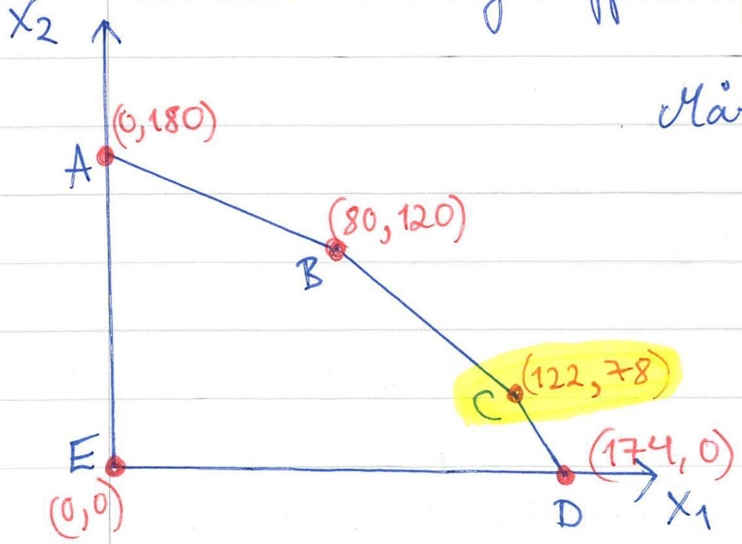
Den optimale løsningen er derfor $X_1 = 122$

$X_2 = 78$

Totalt DB (målfunksjonsverdien) blir :

$$(350 \cdot 122) + (300 \cdot 78) = 66\,100.$$

Enumerering (opplisting) av hjørnepunktene



Målfunksjonsverdier :

A : 54000

B : 64 000

$\boxed{\text{C : 66 100}}$ Optimal løsning

D : 60, 900

E : 0

Marit Helene Gladhaug, NHH

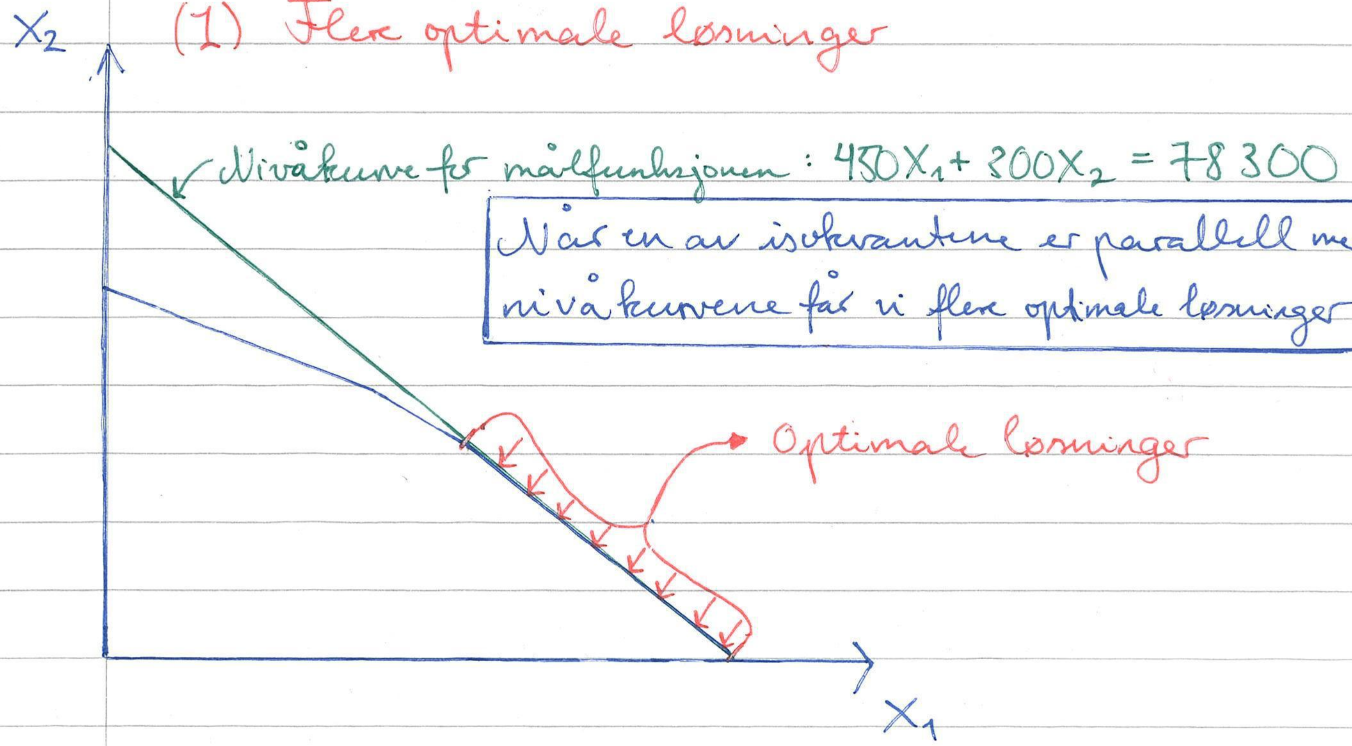
Merk: Denne metoden fungerer ikke dersom løsningen er ubegrenset fordi vi da ikke har noen hjørnepunkter i mulighetsområdet

Grafisk løsning av LP-modeller: Oppsummering

Steg 1: Plott isokvanter for alle begrensningene
Steg 2: Marker mulighetsområdet
Merk: Pass på hvilke fortegn som gjelder: $\geq, \leq, =$
Steg 3: Finn den optimale løsningen på én av følgende måter:
(a) Plott nivåkurver
(b) Enumerer hjørnepunktene i mulighetsområdet

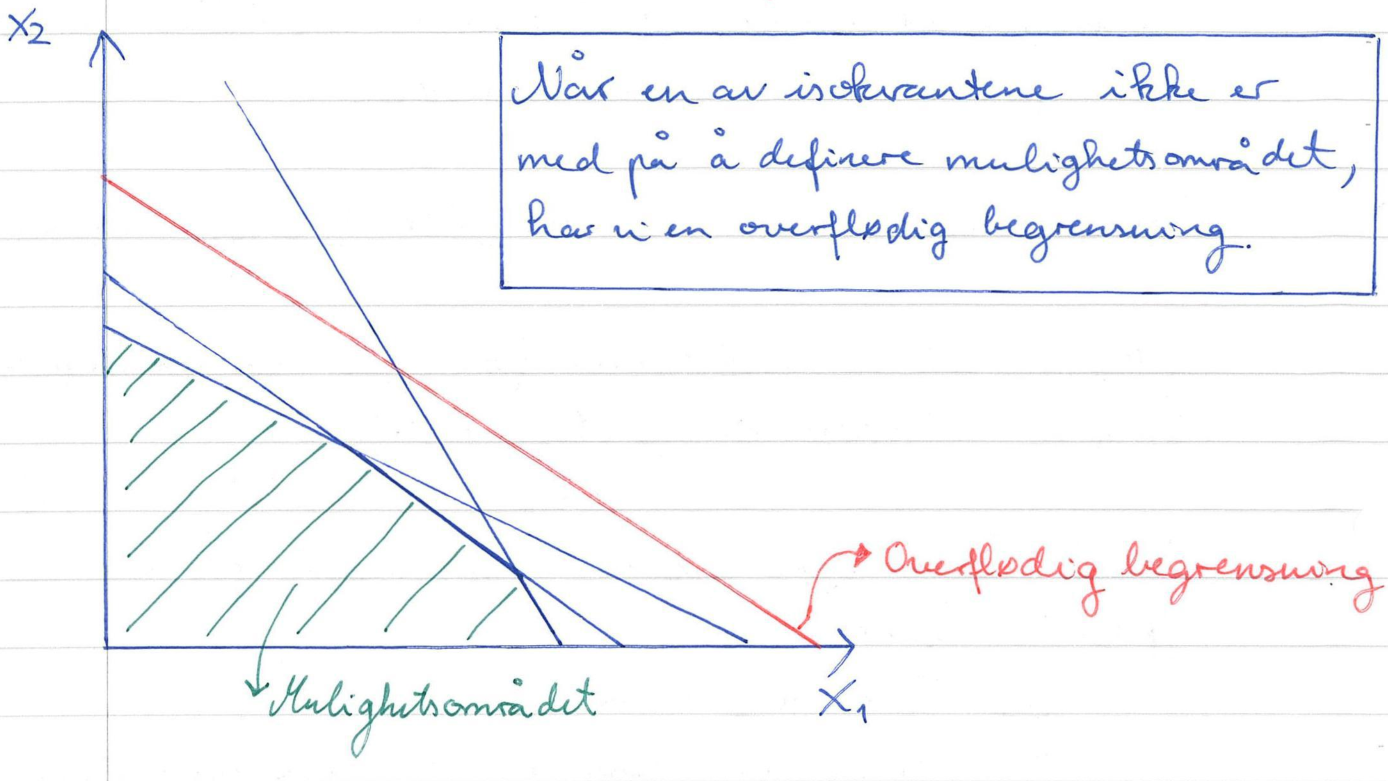
Spesialtilfeller i LP-modeller

(1) Flere optimale løsninger



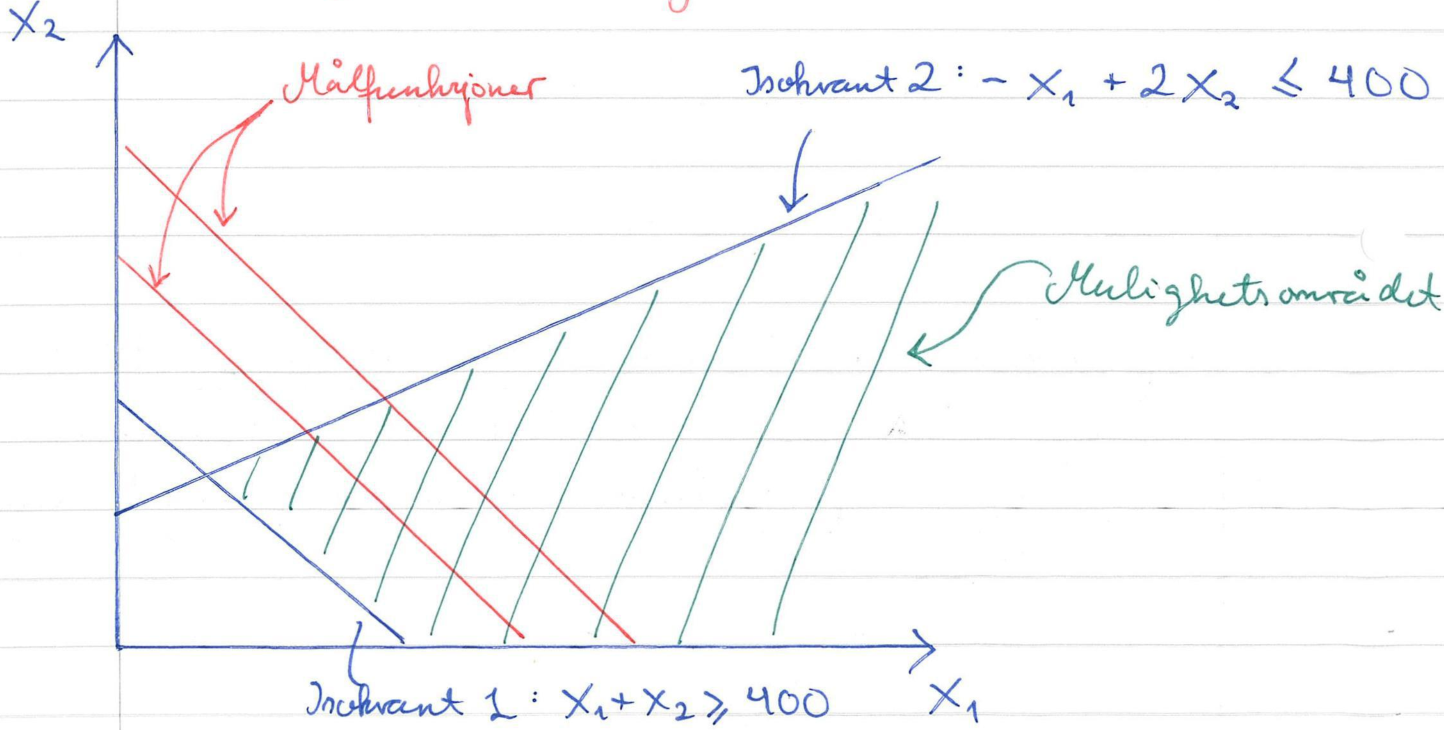
Når en av isokvantene er parallell med nivåkurvene får vi flere optimale løsninger

(2) Overflødige begrensninger



> Når en av isokvantene ikke er med på å definere mulighetsområdet, har vi en overflødig begrensning.

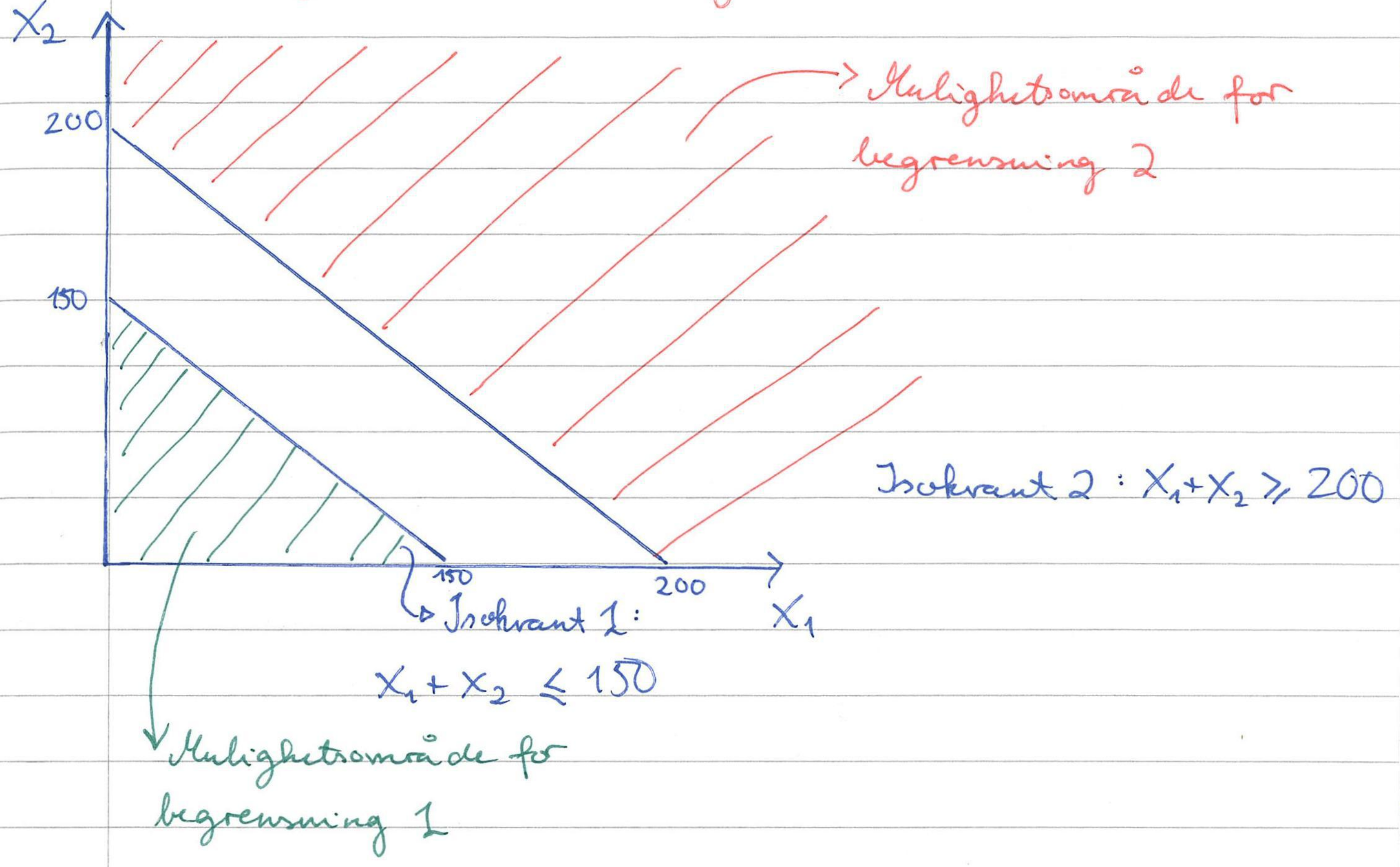
(3) Ubegrenset løsning



Vi vil så langt ut i mulighetsområde som mulig, men har ingen hjørnepunkt som "stopper" prosessen

Marit Helene Gladhaug, NHH

(4) Ingen tillat løsning



Det er ingen tillat løsning fordi ingen kombinasjon av x_1 og x_2 tilfredsstiller de to begrensningene samtidig. Betingelsene blir aldri oppfylt.

Oppsummering : Fire spesialtilfeller for LP-modeller

(1) Flere optimale løsninger
(2) Overflødige begrensninger
(3) Ubegrenset løsning ⇒ Kan ikke bruke nivåkurver til å finne optimal løsning
(4) Ingen tillat løsning

Forelesning 2: Implementering av LP-modeller i regneark

Fire trinn for implementering av regnearkmodeller:

Steg 1: Legg alle dataene til modellen inn i celler i regnearket på en ryddig og forståelig måte

Steg 2: Velg hvilke celler som skal representere beslutnings-variablene (én celle for hver) og marker disse grønne

Steg 3: Legg inn en formel for målfunksjonen i en av cellene i regnearket og marker denne blå

Steg 4: Legg inn, for hver begrensning i modellen, en formel som representerer venstresiden til begrensningen i en celle i regnearket og marker denne rød

Hvordan Analytic Solver "ser" regnearkmodellen

1. Målfunksjonscellen (blå)
2. Celler for beslutningsvariablene (grønne)
3. Celler for venstresidene i begrensningene, samt eventuelle cellereferanser som brukes for å vise høyresidene (røde)

Viktige hensyn ved design av regnearkmodeller

Kommunikasjon: Det viktigste formålet med en

Marit Helene Gladhaug, NHH

regnearkmodell er å kommunisere informasjon til ledere og andre.

Pålitelighet: Resultatene fra modellen må være korrekte og konsistente.

Etterprøvbarhet: Brukeren av modellen må kunne følge beregningene trinn for trinn for å forstå og verifisere resultatene.

Lett å endre: En godt utformet regnearkmodell må være lett å endre og utvide for å tilfredsstille eventuelle nye brukerbehov.

Eksempel 1: Produsere selv eller kjøpe?

Electro-Poly er en ledende produsent av slepeninger. De har nettopp mottat en ordre på $750 000.

	Modell 1	Modell 2	Modell 3
Ordrekvantum	3000	2000	900
Kobling	2	1,5	3
Bunting	1	2	1
Produksjonskostnad	50	83	130
Innkjøpskostnad	61	97	145

Bedriften har 10 000 timer til kobling og 5000 timer til bunting.

Steg 1: Definere beslutningsvariablene

M_1 = antall stykk av modell 1 som produseres
M_2 = antall stykk av modell 2 som produseres
M_3 = antall stykk av modell 3 som produseres
B_1 = antall stykk av modell 1 som kjøpes
B_2 = antall stykk av modell 2 som kjøpes
B_3 = antall stykk av modell 3 som kjøpes

Steg 2: Definere målfunksjonen

Merk: målfunksjonen er en funksjon av beslutnings-variable definert i steg 1.

Målet: Minimere kostnaden ved å levere ordren.

$$\text{MIN}: 50M_1 + 83M_2 + 130M_3 \quad \text{Produksjonskostnad}$$
$$+ \; 61B_1 + 97B_2 + 145B_3 \quad \text{Ordrekostnad}$$

Steg 3: Definere begrensningene

• Etterspørsel:

$M_1 + B_1 = 3000$ Modell 1
$M_2 + B_2 = 2000$ Modell 2
$M_3 + B_3 = 900$ Modell 3

• Tilgang på arbeidskraft:

$2M_1 + 1{,}5M_3 + 3M_3 \leq 10\,000$ Kobling

Marit Helene Gladhaug, NHH

$1M_1 + 2M_2 + 1M_3 \leq 5000$ Bunting

• <u>Ikke-negative-kvanta</u>:

$M_1, M_2, M_3, B_1, B_2, B_3 \geq 0$

Eksempel 2: Investeringsplanlegging

En klient ønsker å investere \$ 750 000 i følgende obligasjoner:

	Selskap	Avkastning	Løpetid	Rating
1	Acme Chemical	8,65 %	11	1 - Excellent
2	DynaStar	9,50 % •	10	3 - Good
3	Eagle Vision	10,00 % •	6	4 - Fair
4	Micro Modeling	8,75 %	10	1 - Excellent
5	OptiPro	9,25 % •	7	3 - Good
6	Salve System	9,00 %	13	4 - Fair

Informasjon: (<u>alltid skriv opp all informasjonen</u>)

$\leq$ • ønsker ikke å investere mer enn 25 % av kapitalen i ett enkelt selskap

$\geq$ • minst 50 % skal investeres i langsiktige obligasjoner (løpetid $\geq$ 10)

$\leq$ • ønsker ikke å investere mer enn 35 % av kapitalen i de mest risikable selskapene: DynaStar, Eagle Vision og OptiPro

Merk: de mest risikable selskapene har høyest avkastning

Steg 1: Definere beslutningsvariablene

X_1 = antall dollar investert i Acme Chemical
X_2 = antall dollar investert i DynaStar
X_3 = antall dollar investert i Eagle Vision
X_4 = antall dollar investert i MicroModeling
X_5 = antall dollar investert i OptiPro
X_6 = antall dollar investert i Sabre Systems

Steg 2: Definere målfunksjonen

Målet: Maksimere total årlig avkastning

$$\text{MAX}: \underbrace{0{,}0865}_{\text{avkastning per aksje}} \underbrace{X_1}_{\text{antall dollar investert i aksjen}} + 0{,}095X_2 + 0{,}10X_3 + 0{,}0875X_4 + 0{,}0925X_5 + 0{,}09X_6$$

Steg 3: Definere begrensningene

- Hele kapitalen skal investeres:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 750\,000$$

- Ikke mer enn 25 % i noe enkeltselskap:

$$0{,}25 \cdot 750\,000 = 187\,500$$

$$X_i \leq 187\,500 \quad \text{for alle } i = 1,2,3,4,5,6$$

- Minst 50 % langsiktige investeringer:

$$0{,}50 \cdot 750\,000 = 375\,000$$

$$X_1 + X_2 + X_4 + X_6 \geq 375\,000$$

- Ikke mer enn 35 % i DynaStar, EagleVision og OptiPro:

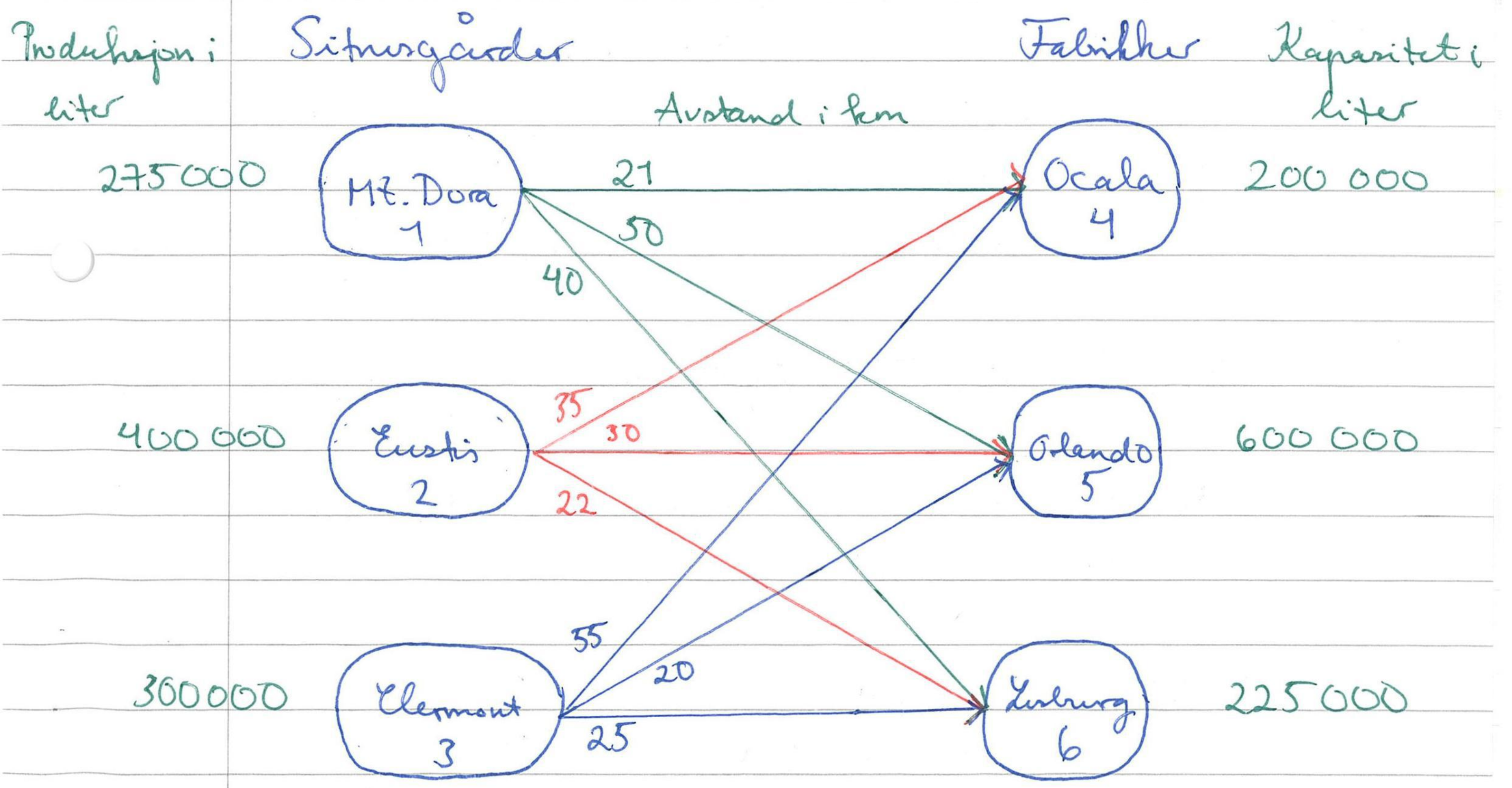
$$0{,}35 \cdot 750\,000 = 262\,500$$

$$X_2 + X_3 + X_5 \leq 262\,500$$

- Ikke-negativitet:

$$X_i \geq 0 \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, 6$$

Eksempel 3: Et transportproblem



Steg 1: Definere beslutningsvariablene

X_{ij} = antall liter som skal sendes fra node i til node j

I dette tilfellet har vi 9 beslutningsvariabler

$$X_1 \begin{cases} X_{14} = \text{antall liter som sendes fra Mt Dora til Ocala} \\ X_{15} = \text{antall liter som sendes fra Mt Dora til Orlando} \\ X_{16} = \text{antall liter som sendes fra Mt Dora til Leesburg} \end{cases}$$

$$X_2 \begin{cases} X_{24} = \text{antall liter som sendes fra Eustis til Ocala} \\ X_{25} = \text{antall liter som sendes fra Eustis til Orlando} \\ X_{26} = \text{antall liter som sendes fra Eustis til Leesberg} \end{cases}$$

$$X_3 \begin{cases} X_{34} = \text{antall liter som sendes fra Clermont til Ocala} \\ X_{35} = \text{antall liter som sendes fra Clermont til Orlando} \\ X_{36} = \text{antall liter som sendes fra Clermont til Leesberg} \end{cases}$$

Steg 2: Definere målfunksjonen

Målet: Minimere omfanget av transporten, målt i antall kilometer

$$\begin{aligned} \text{MIN:} \quad & 21X_{14} + 50X_{15} + 40X_{16} \\ + \; & 35X_{24} + 30X_{25} + 22X_{26} \\ + \; & 55X_{34} \quad 20X_{35} \quad 25X_{36} \end{aligned}$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Steg 3: Definere begrensningene

• Produksjon på sitrusgårdene:

$X_{14} + X_{15} + X_{16} = 275\,000$ Mt. Dora
$X_{24} + X_{25} + X_{26} = 400\,000$ Eustis
$X_{34} + X_{35} + X_{36} = 300\,000$ Clermont

• Kapasitet i fabrikkene:

$X_{14} + X_{24} + X_{34} \leq 200\,000$ Ocala
$X_{15} + X_{25} + X_{35} \leq 600\,000$ Orlando
$X_{16} + X_{26} + X_{36} \leq 225\,000$ Leesburg

• Ikke-negativitet:

$X_{ij} \geq 0$ for alle $i = 1, 2, 3$ og $j = 4, 5, 6$

Eksempel 4: Et blandeproblem

Agri-Pro har mottat en ordre på 8000 kilo kyllingfôr som skal blandes av 4 typer fôr.

	Andel av ingrediense i			
Ingrediens	Fôrtype 1	Fôrtype 2	Fôrtype 3	Fôrtype 4
Mais	30%	5%	20%	10%
Bygg	10%	30%	15%	10%
Mineraler	20%	20%	20%	30%
Kostnad per kilo	0,25	0,30	0,32	0,15

Ordren må minst inneholde 20 % mais, 15 % bygg og 15 % mineraler.

Steg 1: Definerer beslutningsvariablene

X_1 = antall kilo av fôrtype 1 i blandingen
X_2 = antall kilo av fôrtype 2 i blandingen
X_3 = antall kilo av fôrtype 3 i blandingen
X_4 = antall kilo av fôrtype 4 i blandingen

Steg 2: Definerer målfunksjonen

Målet: Minimere totalkostnaden for ordren

$$\text{MIN: } \underbrace{0{,}25}_{\text{Kostnad per kilo}}\underbrace{X_1}_{\text{Antall kilo}} + 0{,}30\,X_2 + 0{,}32\,X_3 + 0{,}15\,X_4$$

Steg 3: Definerer begrensningene

- Produsere 8000 kilo ferdig fôr-blanding:

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8000$$

- Blandingen skal inneholde minst 20 % mais:

$$(0{,}30X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}20X_3 + 0{,}10X_4) : 8000 \geq 0{,}20$$

Merk: Her må vi dele på antall kilo i ordren for å få prosentandelen av mais i ordren. Hvis vi ikke deler på 8000 får vi bare totalt antall kilo med mais, ikke hvor mye mais utgjør i prosent av totalen.

Marit Helene Gladhaug, NHH

- Blandingen skal inneholde minst 15 % bygg:

$(0{,}1X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}15X_3 + 0{,}1X_4) : 8000 \geq 0{,}15$

- Blandingen skal inneholde minst 15 % mineraler:

$(0{,}2X_1 + 0{,}2X_2 + 0{,}2X_3 + 0{,}3X_4) : 8000 \geq 0{,}15$

- Ikke-negativitet:

$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$

Merk: for å unngå skaleringsproblemer (altså stor differanse i koeffisientverdier) kan vi i dette tilfellet reformulere LP-problemet slik at alle koeffisienter er i 1000 kilo.

X_1 = antall 1000 kilo av fôrtype 1
X_2 = antall 1000 kilo av fôrtype 2
X_3 = antall 1000 kilo av fôrtype 3
X_4 = antall 1000 kilo av fôrtype 4

Da får vi målfunksjonen:

$$\underbrace{250}_{0{,}25\cdot 1000} X_1 + \underbrace{350}_{0{,}35\cdot 1000} X_2 + \underbrace{320}_{0{,}32\cdot 1000} X_3 + \underbrace{150}_{0{,}15\cdot 1000} X_4$$

Begrensninger:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 8$

$(0{,}3X_1 + 0{,}05X_2 + 0{,}2X_3 + 0{,}1X_4) : 8 \geq 0{,}2$

$(0{,}1X_1 + 0{,}3X_2 + 0{,}15X_3 + 0{,}1X_4) : 8 \geq 0{,}15$

$(0{,}2X_1 + 0{,}2X_2 + 0{,}2X_3 + 0{,}3X_4) : 8 \geq 0{,}15$

Eksempel 5 : Produksjonsplanlegging

Upton skal planlegge produksjonen av kompressorer for de neste 6 månedene.

	Måned					
	1	2	3	4	5	6
Tilv. merkost/stk	240	250	265	285	280	260
Etterspørsel stk.	1000	4500	6000	5500	3500	4000
Produksjonskapasitet	4000	3500	4000	4500	4000	3500
Minimumsproduksjon	2000	1750	2000	2250	2000	1750

- IB lager = 2750
- Sikkerhetslager = 1500
- Lagerkostnad per stk = 1,5 % av tilv. merkost
- Lagerkapasitet = 6000 stk

Steg 1 : Definere beslutningsvariablene

P_i = produksjon (antall stk) i måned $i = 1, 2, \ldots, 6$

B_i = IB lager (antall stk) i måned $i = 1, 2, \ldots, 6$

Steg 2 : Definere målfunksjonen

Målet : Minimere totale tilvirkningskostnader og lagerholdskostnader

Marit Helene Gladhaug, NHH

MERK: • Lagerkostnad per måned finner vi ved: lagerkostnad per stk $\cdot$ $\underbrace{\text{gjennomsnittlig lagerbeholdning}}_{\downarrow \; \frac{IB + UB}{2}}$

• UB måned 1 = IB måned 2

$$\text{MIN}: 240P_1 + 250P_2 + 265P_3 + 285P_4 + 280P_5 + 260P_6$$
$$+ [(0{,}015 \cdot 240) \cdot (B_1 + B_2) : 2] = 3{,}6 \cdot (B_1 + B_2) : 2$$
$$+ [(0{,}015 \cdot 250) \cdot (B_2 + B_3) : 2] = 3{,}75(B_2 + B_3) : 2$$
$$+ [(0{,}015 \cdot 265) \cdot (B_3 + B_4) : 2] = 3{,}975(B_3 + B_4) : 2$$
$$+ [(0{,}015 \cdot 285) \cdot (B_4 + B_5) : 2] = 4{,}275(B_4 + B_5) : 2$$
$$+ [(0{,}015 \cdot 280) \cdot (B_5 + B_6) : 2] = 4{,}2(B_5 + B_6) : 2$$
$$+ [(0{,}015 \cdot 260) \cdot (B_6 + B_7) : 2] = 3{,}9(B_6 + B_7) : 2$$

Steg 3: Definere begrensningene

• Produksjonsbegrensninger: Produksjon i hver måned må befinne seg i et intervall mellom minimumsproduksjonen og produksjonskapasiteten.

Minimumsproduksjon				Produksjonskapasitet	
2000	$\leq$	P_1	$\leq$	4000	Måned 1
1750	$\leq$	P_2	$\leq$	3500	Måned 2
2000	$\leq$	P_3	$\leq$	4000	Måned 3
2250	$\leq$	P_4	$\leq$	4500	Måned 4
2000	$\leq$	P_5	$\leq$	4000	Måned 5
1750	$\leq$	P_6	$\leq$	3500	

- Sikkerhetslager og lagerkapasitet:

UB = IB + Produksjon − Solgte enheter (etterspørselen)

$$1500 \le B_1 + P_1 - 1000 \le 6000 \qquad \text{Måned 1}$$
$$1500 \le B_2 + P_2 - 4500 \le 6000 \qquad \text{Måned 2}$$
$$1500 \le B_3 + P_3 - 6000 \le 6000 \qquad \text{Måned 3}$$
$$1500 \le B_4 + P_4 - 5500 \le 6000 \qquad \text{Måned 4}$$
$$1500 \le B_5 + P_5 - 3500 \le 6000 \qquad \text{Måned 5}$$
$$1500 \le B_6 + P_6 - 4000 \le 6000 \qquad \text{Måned 6}$$

Etterspørsel i hver måned

Sikkerhetslager — UB i hver måned — Lagerkapasitet

- IB lager:

$$B_1 = 2750$$
$$B_2 = B_1 + P_1 - 1000$$
$$B_3 = B_2 + P_2 - 4500$$
$$B_4 = B_3 + P_3 - 6000$$
$$B_5 = B_4 + P_4 - 5500$$
$$B_6 = B_5 + P_5 - 3500$$
$$B_7 = B_6 + P_6 - 4000$$

Legg merke til at B_i er en funksjon av P_i. Derfor trenger vi bare P_i som beslutningsceller i modellen i regnearket

IB hver måned (B_i) er lik IB i måneden før (B_{i-1}) pluss produksjonen i forrige måned, minus antall solgte enheter i forrige måned. Det er det samme som å si at $UB_1 = IB_2$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Forelesning 3: LP og følsomhetsanalyser + skyggepriser

Når vi løser et LP-problem, antar vi at verdien av alle koeffisientene i modellen er kjent **med sikkerhet**. Dette er sjelden tilfelle. Følsomhetsanalyse hjelper til med å svare på spørsmål om hvor følsom optimalløsningen er for endringer i ulike koeffisienter i en modell.

Generell formulering av et lineær programmeringsproblem (LP)

MAX eller MIN: $c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$

Gitt at:

$$a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \dots + a_{1n} X_n \leq b_1$$
$$a_{k1} X_1 + a_{k2} X_2 + \dots + a_{kn} X_n \geq b_k$$
$$a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \dots + a_{mn} X_n = b_m$$

> Hvor følsom/sensitiv er løsningen ved endringer i c_i, a_{ij}, b_i?

Solvers "Sensitivity Report"

Svarer på spørsmål om:

- hvor mye målfunksjonskoeffisientene C_i kan endres uten å endre på optimalløsningen : ΔC_i
- effekten på den optimale målfunksjonsverdien av endringer i begrensede ressurser : Δb_i
- effekten på den optimale målfunksjonsverdien av tvunget endring i beslutningsvariabler : ΔX_1 og ΔX_2

• hvilken effekt endringer i koeffisientene i begrensningen vil ha på den optimale løsningen : Δa_i

Følsomhetsanalyse i Analytic Solver

To rapporter vi bruker ved følsomhetsanalyse :

(1) The Answer Report

• Gir en kort oppsummering av løsningen på problemet
• Under "Analytic Solver Platform" - fanen klikker vi på : "Reports", "Optimization", "Answer".

(2) The Sensitivity Report

• Gir informasjon om hvor sensitiv optimalløsningen er med hensyn til ulike modellparametre
• Under "Analytic Solver Platform" - fanen klikker vi på : "Reports", "Optimization", "Sensitivity".

Hvordan endringer i målfunksjonskoeffisientene endrer helningen på nivåkurvene

Eksempel : MAX : $350 X_1 + 300 X_2$ Profitt

Gitt at : $X_1 + X_2 \leq 200$ Pumper

$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$ Arbeid

$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$ Rør

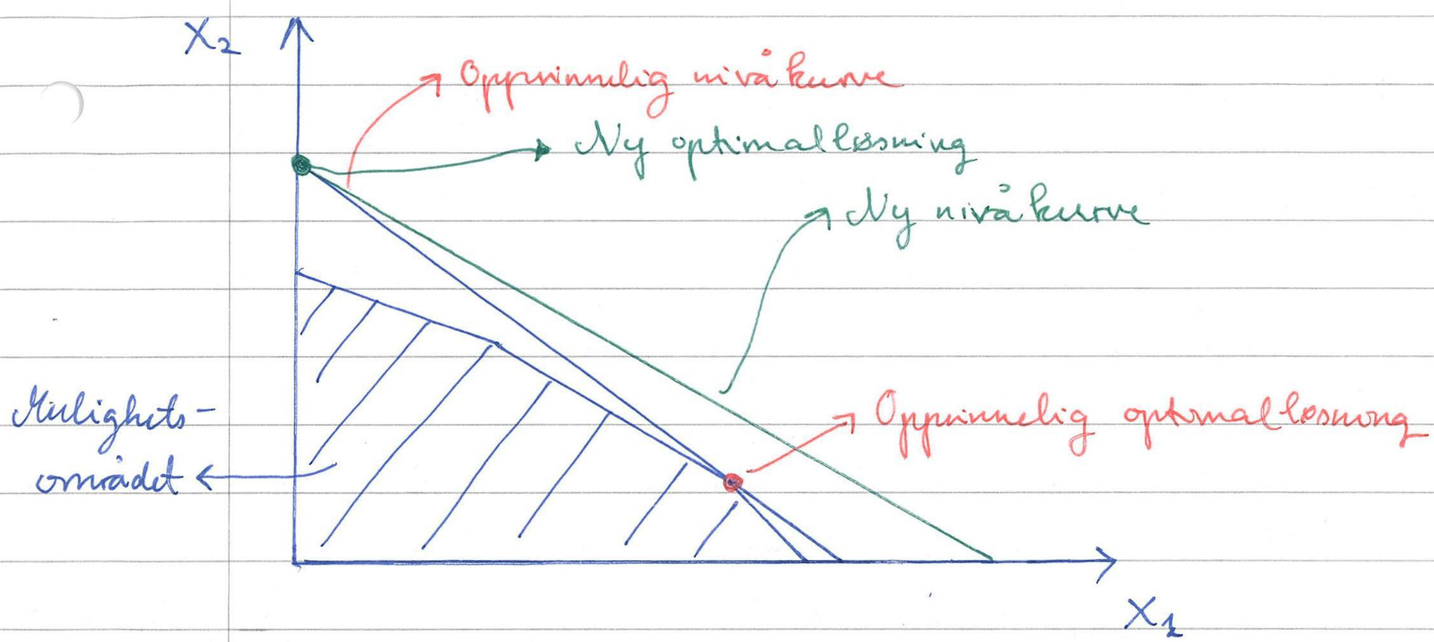
$X_1, X_2 \geq 0$ Ikke-negativitet

Marit Helene Gladhaug, NHH

Hva skjer hvis målfunksjonen endres til :

$$400 X_1 + 250 X_2 \quad ?$$

Da får vi en ny nivåkurve med nytt stigningstall, og som derfor ikke er parallell med den opprinnelige nivåkurven. Som konsekvens får vi også en ny optimal løsning.



Endringer i målfunksjonskoeffisientene (ΔC_i)

Verdiene i kolonnene Allowable Increase / Decrease for "Decision Variable Cells" angir hvor mye en målfunksjonskoeffisient kan endre seg uten at optimalløsningen endres, forutsatt at alle andre koeffisienter forblir konstante (ceteris paribus-effekt).

Eksempel : Målfunksjonen er $350 X_1 + 300 X_2$

$$C_1 = 350 \quad \text{og} \quad C_2 = 300$$

	X_1	X_2
Allowable Increase :	105	52
Allowable Decrease :	35	23

For X_1:
Løsningen gjelder i intervallet: [315, 455]

Dette betyr at målfunksjonskoeffisienten til X_1 kan stige til $350 + 105 = 455$ og synke til $350 - 35 = 315$ uten at den optimale løsningen endres, dersom vi holder alle andre koeffisienter konstant.

For X_2:
Løsningen gjelder i intervallet: [277, 352]

Videre kan målfunksjonskoeffisienten til X_2 stige til $300 + 52 = 352$ og synke til $300 - 23 = 277$ uten at den optimale løsningen endres, dersom vi holder alle andre koeffisienter konstant.

Merk: verdier lik null i "Allowable Increase" eller "Allowable Decrease" for "Decision Variable Cells" indikerer at flere optimale løsninger finnes. I dette tilfellet heter det at løsningen er degenerert.

Endringer i begrensningenes høyresider (Δb_i)

- Skyggeprisen til en begrensning angir hvor mye målfunksjonsverdien endrer seg, gitt én enhets økning i høyresideverdien på begrensningen (altså at tilgangen på ressursen øker), under der forutsetning av at alle andre koeffisienter forblir konstante (ceteris paribus-effekt).

Marit Helene Gladhaug, NHH

- Skyggeprisene gjelder kun for endringer av høyre-sideverdiene som er innenfor grensene angitt i "Allowable Increase" og "Allowable Decrease"-kolonnene.
- Skyggeprisene for ikke-bindende begrensninger er alltid null.

Hva er ikke-bindende begrensninger? Når vi har tilgjengelige ressurser til overs har vi en ikke-bindende begrensning. I så tilfellet har vi isokvanter som ikke er med på å definere mulighetsområdet, altså overflødige begrensninger.

Eksempel: Vi har 1566 arbeidstimer tilgjengelige.
Begrensningen er: $9X_1 + 6X_2 \leq 1566$
Dersom den optimale løsningen er $X_1 = 120$ og $X_2 = 70$ får vi:

$$9 \cdot 120 + 6 \cdot 70 = 1500 < 1566$$

Vi bruker kun 1500 av de 1566 tilgjengelige arbeidstimene. Dette er en ikke-bindende begrensning.
Da er skyggeprisen for arbeidstimer lik null!
Siden vi ikke bruker alle tilgjengelige arbeidstimer, vil ikke den optimale målfunksjonsverdien øke dersom vi får flere tilgjengelige arbeidstimer. Derfor er alltid skyggeprisen lik null for ikke-bindende begrensninger.

Skyggepris = 0 for ikke-bindende begrensninger.

Kommentarer om endringer i begrensningenes høyresideverdier

- Skyggeprisene viser bare endringer i målfunksjons-verdien når høyresideverdiene endres.

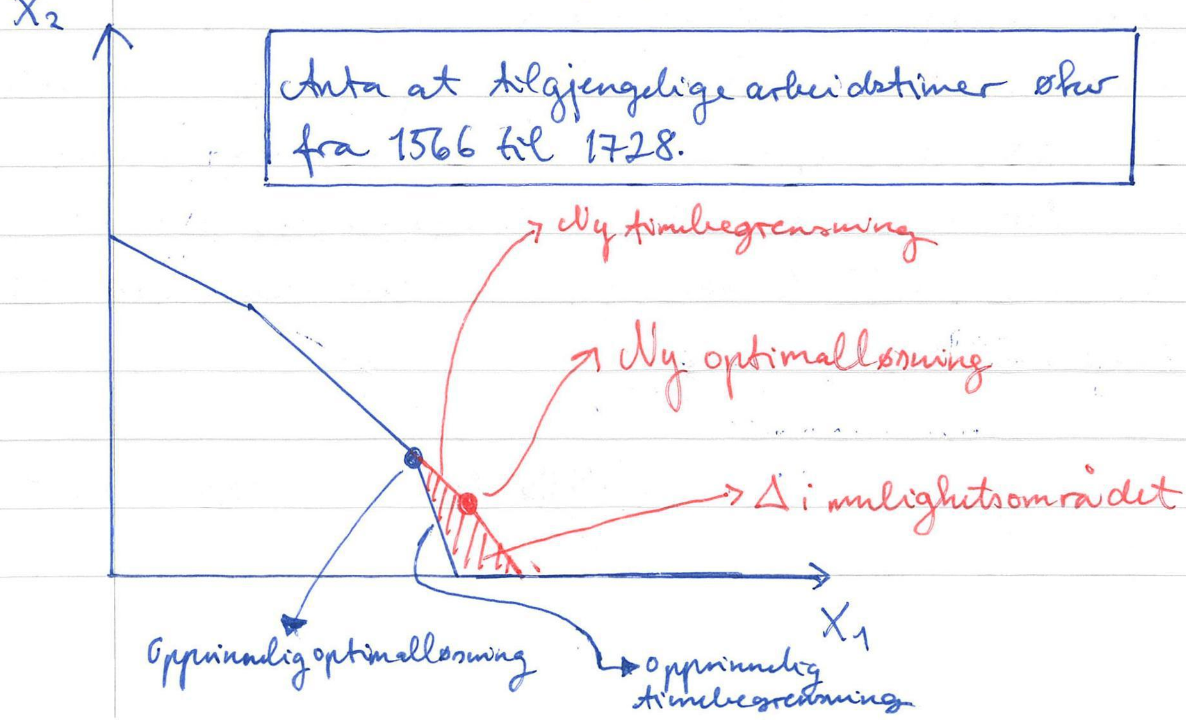
Eksempel: $9X_1 + 6X_2 \leq \boxed{1566}$ → Øker denne med én enhet til 1567

- Endring av en høyresideverdi for en bindende begrensning endrer også mulighetsområdet og optimalløsningen.

- For å finne optimalløsningen etter å ha endret en bindende høyresideverdi, må man løse problemet på nytt.

Hvordan endring av en høyresideverdi kan endre mulighetsområde og optimalløsningen

Anta at tilgjengelige arbeidstimer øker fra 1566 til 1728.



Marit Helene Gladhaug, NHH

Andre bruksområder for skyggepriser

Anta at en ny type Hot Tub (Typhoon-Lagoon) vurderes. Disse generer et dekningsbidrag per stykk på $320 og krever:

- 1 pumpe (skyggepris = $200)
- 8 arbeidstimer (skyggepris = $16,67)
- 13 fot rør (skyggepris = $0)

Merk at rør er en ikke-bindende begrensning.

Q: Vil det lønne seg å produsere Typhoon-Lagoon?

$$A:\ \underbrace{\$320}_{\text{Marginal profitt}} - \underbrace{[\$200 \cdot 1 + \$16,67 \cdot 8 + \$0 \cdot 13]}_{\text{Marginal ressursbruk}} = -\$13,33$$

Nei, fordi marginal profitt < marginal ressursbruk
$\Rightarrow$ Redusert kostnad < 0

Betydningen av reduserte kostnader

- Redusert kostnad for et produkt tilsvarer produktets marginale profitt minus ressursbruken per enhet, priset med skyggeprisene.

> Marginal ressursbruk finner vi slik:
> skyggepris for ressursen · ressursbruk per enhet

Type problem	Optimal beslutningsvariabel	Optimalverdi redusert kostnad
Maksimering	på nedre grense	Velønnsom ≤ 0
	mellom nedre og øvre grense	$= 0$
	på øvre grense	≥ 0
Minimering	på nedre grense	Velønnsom ≥ 0
	mellom nedre og øvre grense	$= 0$
	på øvre grense	≤ 0

Key Points

- Skyggeprisene på ressurser gir likhet mellom marginalverdien av ressursene som forbrukes og marginalverdien av produktene som produseres.

- Ressurser som det er for mye av har skyggepris (eller marginalverdi) lik null.

- Redusert kostnad for et produkt er lik differansen mellom produktets marginale profitt og marginalverdien av ressursene det forbruker

- Produkter som har marginal profitt mindre enn marginalverdien av ressursene som trengs for å produsere produktet, vil ikke bli produsert i optimalløsningen. (Med mindre tilpasningen befinner seg på nedre grense og vi er tvunget til å produsere produktet).

Marit Helene Gladhaug, NHH

Analyse av endringer i koeffisientene i begrensningene Δa_{ij}

Q: Anta at Typhoon-Lagoon bare trenger 7 arbeidstimer i stedet for 8. Er det nå lønnsomt å produsere produktet?

$$A: \underbrace{\$320}_{\text{Marginal profitt}} - \underbrace{[\$200 \cdot 1 + \$16{,}67 \cdot 7 + \$0 \cdot 13]}_{\text{Marginal ressursbruk}} = \underline{\$3{,}31}$$

Ja, fordi marginalprofitt > marginal ressursbruk

Q: Hva er det maksimale antall arbeidstimer Typhoon-Lagoon kunne krevd og likevel vært lønnsomt?

A: Vi trenger at redusert kostnad blir positiv:

$$\$320 - [\$200 \cdot 1 + \$16{,}67 \cdot L_3 + \$0 \cdot 13] \geq 0$$

Løser for L_3:

$$320 \geq 200 + 16{,}67 L_3$$
$$120 \geq 16{,}67 L_3$$
$$\underline{\underline{L_3 \leq 7{,}20}}$$

Det maksimale antall arbeidstimer er 7,20 timer.

Samtidige endringer i målfunksjonskoeffisientene

- 100%-regelen kan brukes til å bestemme om optimalløsningen endres når flere enn en målfunksjonskoeffisient endres.

- To tilfeller kan oppstå:

Case 1: Alle variabler med endret målfunksjonskoeffisient har redusert kostnad $\neq 0$

  - Gjeldende løsning er optimal gitt at alle endringer i målfunksjonskoeffisientene er innenfor "Allowable Increase / Decrease".

Case 2: Minst én variabel med endret målfunksjonskoeffisient har redusert kostnad $= 0$.

  - For hver variabel beregne:

$$\boxed{r_j = \begin{cases} \dfrac{\Delta C_j}{I_j} & \text{hvis } \Delta C_j \geq 0 \\[2ex] \dfrac{-\Delta C_j}{D_j} & \text{hvis } \Delta C_j < 0 \end{cases}}$$

  - Hvis mer enn en målfunksjonskoeffisient endres, er nåværende løsning fortsatt optimal

Marit Helene Gladhaug, NHH

gitt at r_j-verdiene summerer seg til ≤ 1.

- Hvis r_j summerer seg til > 1, kan nåværende løsning fortsatt være optimal, men det kan ikke garanteres.

En advarsel om degenerasjon

$\boxed{\text{Løsningen av et LP-problem er degenerert dersom "Allowable Increase / Decrease" for noen av begrensningene er like null.}}$

Når løsningen er degenerert:

(1) Tidligere nevnte metode for å oppdage alternative optimalløsninger er ikke pålitelige

(2) Redusert kostnad er ikke nødvendigvis unik. I tillegg må målfunksjonskoeffisientene endres med minst like mye som (og muligens mer enn) de respektive reduserte kostnadene før optimalløsningen endrer seg.

(3) "Allowable Increase / Decrease" for målfunksjons-koeffisientene gjelder fortsatt, og faktisk må koeffisientene kanskje endres utover "Allowable Increase / Decrease" før optimalløsningen endrer seg.

(4) Skyggeprisene og deres rekkevidde kan tolkes på vanlig måte, men de er ikke nødvendigvis unike. Det vil si at et annet sett med skyggepriser, og

tilhørende rekkevidder også kan gjelde for problemet (selv om den optimale løsningen er unik).

Spider Tables & Plots

Viser optimalverdien til én output celle når endringer gjøres i ulike input celler, én om gangen.

Endringer i input/parameter celler angis ved hjelp av :

- = Psi Opt Param (min ; max ; utgangspunkt)
- hvis vi endrer P parametre over V verdier må vi løse P · V optimeringsproblemer

Solver Tables

Viser optimalverdien i flere output celler når endringer gjøres i én input celle.

Bruker Psi Opt Param (min ; max ; utgangspunkt) for å spesifisere verdier i input cellen som skal brukes i optimeringen

$$= \text{Psi Opt Param} \left(\text{min; max; } \underbrace{\text{base\_case}}_{\text{utgangspunkt}} \right)$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Forelesning 4: Lineær heltallsprogrammering

Innhold: Enten/eller-beslutninger. Bruk av heltallsvariabler i beslutningsmodeller.

- Heltallsvariabler, LP-relaksasjon og grenser
- Løsning av lineære heltallsproblemer
- Logiske betingelser og "Big M"

Når én eller flere variabler i et LP-problem må være heltallige, har vi et lineært heltallsproblem eller et "Integer Linear Programming (ILP) problem".

ILP'er oppstår ofte

- bemanningsplaner
- produksjon av fly

Heltallsvariabler gjør det mulig å lage mer nøyaktige modeller for en rekke vanlige bedriftsøkonomiske beslutningsproblemer.

Heltallsbegrensninger

MAX:	$350X_1 + 300X_2$	Profitt
Gitt at:	$X_1 + X_2 \leq 200$	Pumper
	$9X_1 + 6X_2 \leq 1566$	Arbeid
	$12X_1 + 16X_2 \leq 2880$	Rør
	$X_1, X_2 \geq 0$	Ikke-negativitet
	$\boxed{X_1, X_2 \text{ må være heltall}}$	Heltall

Merk: heltallsbegrensninger er enkle å formulere, men gjør problemet mye vanskeligere (og noen ganger umulig) å løse.

Relaksering: Å gå fra ILP til LP

- Opprinnelig ILP

$$\begin{aligned} \text{MAX:} \quad & 2X_1 + 3X_2 \\ \text{Gitt at:} \quad & X_1 + 3X_2 \leq 8{,}25 \\ & 2{,}5X_1 + X_2 \leq 8{,}75 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \\ & \boxed{X_1, X_2 \text{ må være heltall}} \end{aligned}$$

- LP-relaksasjon

$$\begin{aligned} \text{MAX:} \quad & 2X_1 + 3X_2 \\ \text{Gitt at:} \quad & X_1 + 3X_2 \leq 8{,}25 \\ & 2{,}5X_1 + X_2 \leq 8{,}75 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

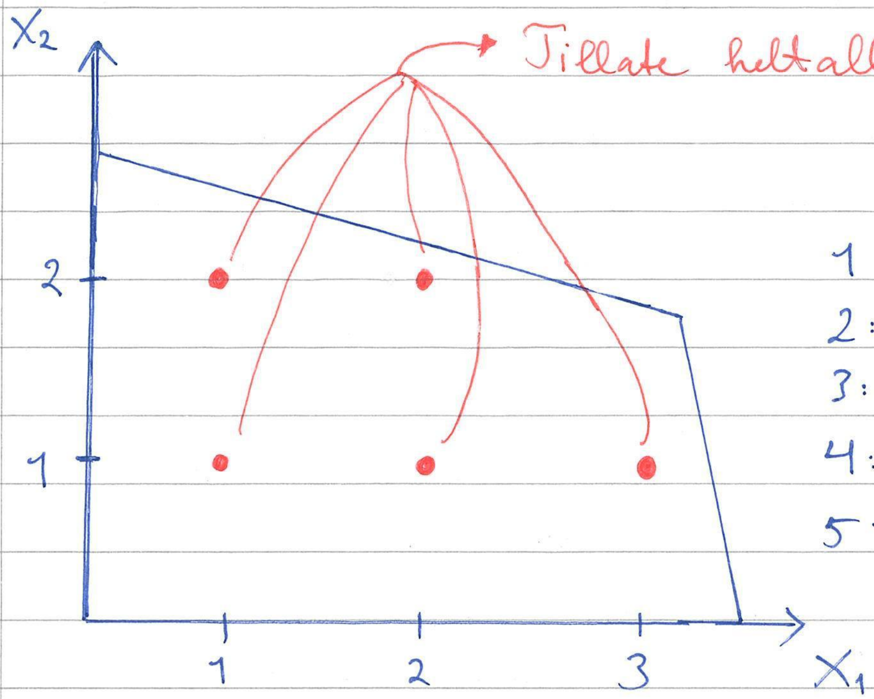
LP-relaksering vil si at man ikke har med heltallsbegrensningen. Ellers er de to optimeringsproblemene like.

Det eneste som skiller ILP fra LP er heltallsbegrensningen.

Marit Helene Gladhaug, NHH

Mulighetsområde til ILP versus LP

For LP er hele mulighets-området tillat!



	X_1	X_2
1:	(1 ,	1)
2:	(1 ,	2)
3:	(2 ,	1)
4:	(2 ,	2)
5:	(3 ,	1)

Grenser

- Optimalløsningen til LP-relaksasjonen av et ILP-problem gir oss en grense for den optimale målfunksjonsverdien.

- For maksimeringsproblem er den optimale relakserte målfunksjonsverdien en øvre grense for den optimale heltallsverdien.
  Man vil altså aldri få en løsning i ILP-problemet som gir høyere målfunksjonsverdi enn i LP-problemet.

- For minimeringsproblemer er den optimale relakserte målfunksjonsverdien en nedre grense for den optimale heltallsverdien.

Man vil altså aldri få en løsning i ILP-problemet som gir en lavere målfunksjonsverdi enn i LP-problemet.

Konklusjon: I et ILP-problem vil vi aldri få en optimal løsning som er bedre [enten høyere i MAX eller lavere i MIN] enn den optimale løsningen i LP-problemet. Dette er fordi vi har én ekstra begrensning.

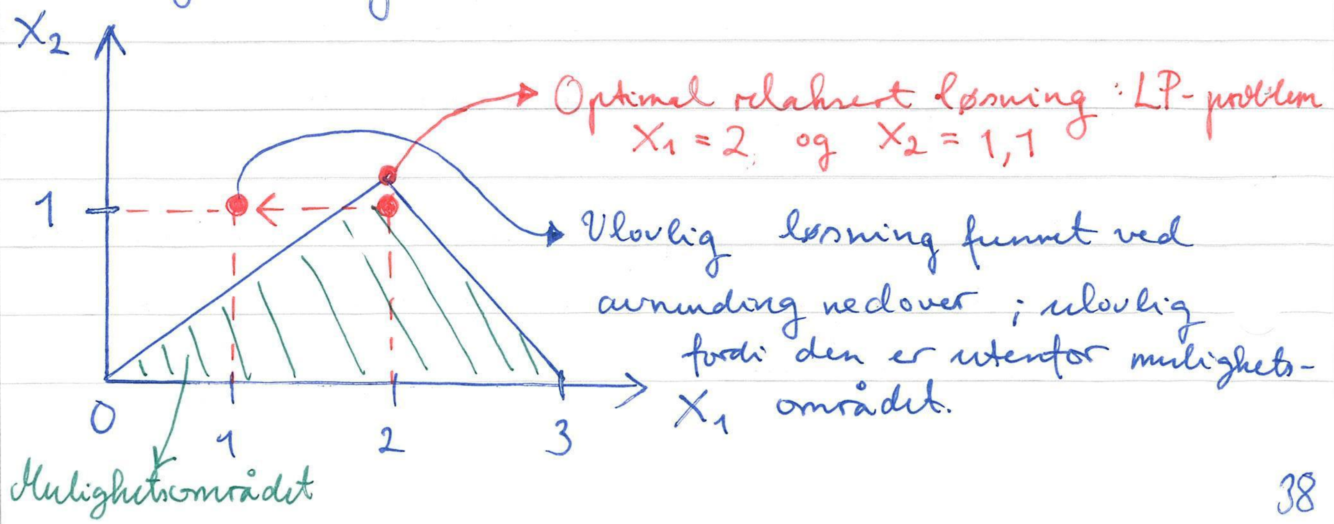
Avrunding

Det er fristende å ganske enkelt runde av en fraksjonell løsning ($X_1 = 2,33$ og $X_1 = 1,56$) til nærmeste heltallsløsning ($X_1 \approx 2$ og $X_2 \approx 2$).

Generelt fungerer ikke dette:

- Avrundingsløsningen kan være ulovlig
- Avrundingsløsningen kan være suboptimal (det finnes bedre løsninger)

Hvordan avrunding nedover kan resultere i en ulovlig løsning



Marit Helene Gladhaug, NHH

Binære variabler

- Binære variabler er heltallsvariabler som bare kan ta verdiene 0 og 1.

Eksempel 1: En investeringsbeslutning

		Kapital nødvendig i år..				
Prosjekt	E(NPV)	År 1	År 2	År 3	År 4	År 5
1	141	75	25	20	15	10
2	187	90	35	0	0	30
3	121	60	15	15	15	15
4	83	30	20	10	5	5
5	265	100	25	20	20	20
6	127	50	20	10	30	40
Tilgjengelig kapital		250	75	50	50	50

Steg 1: Definerer beslutningsvariablene

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis prosjekt } i \text{ er valgt, } i = 1, 2, \dots, 6 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Steg 2: Definerer målfunksjonen

Målet: Maksimere samlet nåverdi for valgte prosjekter.

$$\text{MAX}: 141X_1 + 187X_2 + 121X_3 + 83X_4 + 265X_5 + 127X_6$$

Steg 3: Definerer begrensningene

- Kapitalbegrensninger: [i 1000]

År 1 $\quad 75X_1 + 90X_2 + 60X_3 + 30X_4 + 100X_5 + 50X_6 \leq 250$

År 2 $\quad 25X_1 + 35X_2 + 15X_3 + 20X_4 + 25X_5 + 20X_6 \leq 75$

År 3 $\quad 20X_1 + 0X_2 + 15X_3 + 10X_4 + 20X_5 + 10X_6 \leq 50$

År 4 $\quad 15X_1 + 0X_2 + 15X_3 + 5X_4 + 20X_5 + 30X_6 \leq 50$

År 5 $\quad 10X_1 + 30X_2 + 15X_3 + 5X_4 + 20X_5 + 40X_6 \leq 50$

- Binære begrensninger:

Alle X_i må være binære

Binære variabler og logiske begrensninger

- Binære variabler er også nyttige for å modellere forskjellige logiske betingelser.

- Av prosjekt 1, 3 og 6 kan vi ikke velge mer enn ett:

$$X_1 + X_3 + X_6 \leq 1$$

- Prosjekt 4 kan ikke velges med mindre prosjekt 5 også er valgt: $X_4 \leq X_5$ (men vi vil ha tall på HS)

$$X_4 - X_5 \leq 0$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Problem med faste kostnader

- Mange beslutninger resulterer i at faste kostnader eller "lump-sum"-kostnader påløper

- Eksempler:
  - kostnader for å leie eller kjøpe utstyr som kreves dersom et bestemt tiltak iverksettes
  - omstillingskostnader som er nødvendig for å klargjøre en maskin eller produsere et nytt produkt
  - kostnader for å bygge en ny produksjonslinje som vil bli påkrevd dersom en bestemt beslutning fattes
  - kostnader ved å ansette ekstra personell som kreves dersom en bestemt beslutning fattes

Eksempel 3: Faste kostnader

	Timer som kreves av			
Operasjon	Prod. 1	Prod. 2	Prod. 3	Timer tilgjengelig
Maskinering	2	3	6	600
Sliping	6	3	4	300
Montering	5	6	2	400
DB per enhet	48	55	50	
Omstillingskostnader	1000	800	900	

Faste kostnader

Steg 1: Definere beslutningsvariabler

X_i = antall enheter som produseres av produkt i, $[i = 1,2,3]$

$$\boxed{Y_i = \begin{cases} 1 \text{ hvis } X_i \geq 0 & i = 1,2,3 \\ 0 \text{ hvis } X_i = 0 \end{cases}}$$

Kobler sammen valget av produksjon 1 og de faste kostnadene forbundet til prosjekt 1 på 1000.

Steg 2: Definere målfunksjonen

Målet: Maksimere totalt overskudd

$$\text{MAX}: \underbrace{48X_1 + 55X_2 + 50X_3}_{\text{Totalt DB}} \underbrace{- 1000Y_1 - 800Y_2 - 900Y_3}_{\text{Totale faste kostnader}}$$

Steg 3: Definere begrensningene

- <u>Ressursbegrensninger:</u>

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 + 6X_3 &\leq 600 && \text{Maskinering} \\ 6X_1 + 3X_2 + 4X_3 &\leq 300 && \text{Sliping} \\ 5X_1 + 6X_2 + 2X_3 &\leq 400 && \text{Montering} \end{aligned}$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

- **Binære begrensninger:**

Alle Y_i må være binære (kan bare være 0 eller 1)

- **Ikke-negativitets-begrensninger:**

$X_i \geq 0 \quad , i = 1,2,3$

- **OBS! Vi trenger også KOBLINGSBEGRENSNINGER kalt "Big M", mellom X_i og Y_i:**

$X_1 \leq M_1 Y_i$ eller $\boxed{X_1 - M_1 Y_1 \leq 0}$

$X_2 \leq M_2 Y_2$ eller $\boxed{X_2 - M_2 Y_2 \leq 0}$

$X_3 \leq M_3 Y_3$ eller $\boxed{X_3 - M_3 Y_3 \leq 0}$

Hvis $X_i = 0$ tillater disse begrensningene Y_i å være lik 0 eller 1, men målfunksjonen vil gjøre at Solver velger 0. Hvis $X_i > 0$ tvinger disse begrensningene til å gjøre $Y_i = 1$.
Merk at M_i legger en øvregrense på X_i.
Vi må finne rimelige verdier for M_i.

Finne rimelige verdier for M_i

Steg 1:

- Se på ressursbegrensningene:

$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 600$ Maskinering

$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 300$ Sliping

$5X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 400$ Montering

Steg 2: • Hva er den maksimale verdien X_1 kan ha?

Lar $X_2 = X_3 = 0$

$$X_1 = MIN(600:2,\ 300:6,\ 400:2)$$
$$= MIN(300,\ 50,\ 80)$$
$$= 50 = M_1$$

M_1 finner vi ved å velge den minste av de maksimale verdiene X_1 kan ta, forutsatt at vi kun produserer X_1 og har gitte ressurser.

Steg 3: Finner verdiene til M_2 og M_3 på tilsvarende måte:

$$X_2 = MIN(600:3,\ 300:3,\ 400:6)$$
$$= MIN(200,\ 100,\ 66.67)$$
$$= 66{,}67 = M_2$$

$$X_3 = MIN(600:6,\ 300:4,\ 400:2)$$
$$= MIN(100,\ 75,\ 200)$$
$$= 75 = M_3$$

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= 50 \\ M_2 &= 66{,}67 \\ M_3 &= 75 \end{aligned}\right\}$$ Setter verdiene inn i koblingsbegrensningene $X_i - Y_i M_i \leq 0$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Oppsummering av modellen :

$$\text{MAX}: 48X_1 + 55X_2 + 50X_3 - 1000Y_1 - 800Y_2 - 900Y_3$$

Gitt at :
$$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 600 \quad \text{Maskinering}$$
$$6X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 300 \quad \text{Sliping}$$
$$5X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 400 \quad \text{Montering}$$

$M_1 = 50$ $\quad X_1 - 50Y_1 \leq 0$
$M_2 = 67$ $\quad X_2 - 67Y_2 \leq 0$
$M_3 = 75$ $\quad X_3 - 75Y_3 \leq 0$

Koblingsbegrensninger

Alle Y_i må være binære
$X_i \geq 0$ for $i = 1, 2, 3$

Minste ordrestørrelse

Anta at bedriften ikke ønsker å produsere noen enheter av produkt 3 med mindre det produseres minst 40 enheter.

Merk : To begrensninger !

$$X_3 \leq M_3Y_3 \Rightarrow X_3 - M_3Y_3 \leq 0$$
$$X_3 \geq 40Y_3 \Rightarrow X_3 - 40Y_3 \geq 0$$

Dette tvinger X_3 til å bli minst 40.

Kvantumsrabatter

Anta at dersom Blue Ridge Hot Tubs produserer mer enn 75 Aqua-Spa (X_1), oppnås en rabatt som øker DB per stykk til 375. Dersom selskapet produserer mer enn 50 Hydro-Lux (X_2) øker DB per stykk til 325.

Ny LP-modell:

$$\text{MAX}: \underbrace{350 X_{11}}_{\text{Opprinnelig}} + \underbrace{375 X_{12}}_{\text{DB hvis } X_1 > 75} + \underbrace{300 X_{21}}_{\text{Opprinnelig}} + \underbrace{325 X_{22}}_{\text{DB hvis } X_2 > 50}$$

Gitt at:

$$1X_{11} + 1X_{12} + 1X_{21} + 1X_{22} \leq 200$$
$$9X_{11} + 9X_{12} + 6X_{21} + 6X_{22} \leq 1566$$
$$\underbrace{12X_{11} + 12X_{12}}_{X_1} + \underbrace{16X_{21} + 16X_{22}}_{X_2} \leq 2880$$

$X_{12} \leq M_{12} Y_1$

$X_{11} \geq 75 Y_1$ ⇒ Må produsere minst 75

$X_{22} \leq M_{22} Y_2$

$X_{21} \geq 50 Y_2$ ⇒ Må produsere minst 50

$X_{ij} \geq 0$

X_{ij} må være heltall

Y_i må være binære

Typer av heltallsproblemer

- LP-problemer der alle variabler må ta heltallsverdier (ILP)
- LP-problemer der noen av variablene må ta heltallsverdier (MILP)
- LP-problemer med binære variabler, dvs variabler som tar verdiene 0 eller 1 (BILP)

Marit Helene Gladhaug, NHH

Forelesning 5: Ikke-lineære beslutningsmodeller

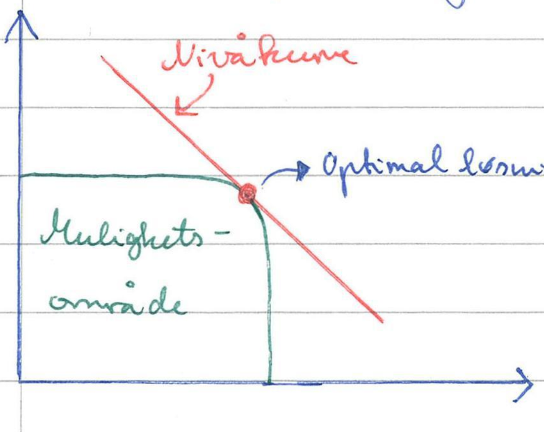
Et NLP-problem har en ikke-lineær målfunksjon og/eller en eller flere ikke-lineære begrensninger

Et NLP-problem formuleres og implementeres stort sett på samme måte som LP-problemer.

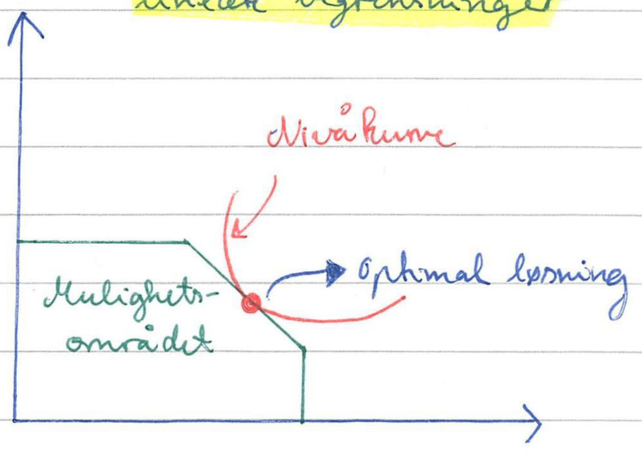
Løsningsmetoden for NLP og LP er imidlertid svært ~~fo~~ forskjellige.

Typiske NLP-problemer

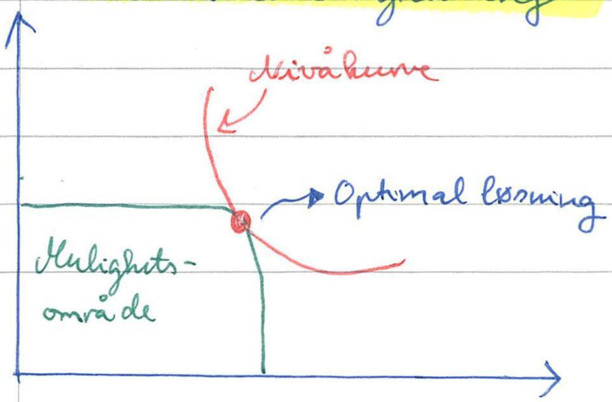
1) Lineær målfunksjon, ikke-lineære begrensninger



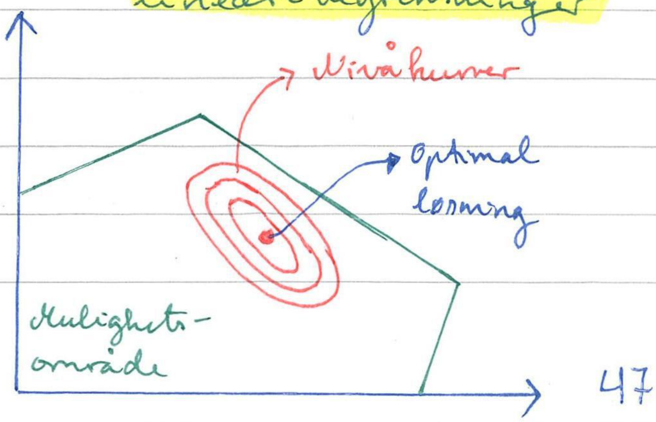
2) Ikke-lineær målfunksjon, lineære begrensninger



3) Ikke-lineær målfunksjon, ikke-lineære begrensninger



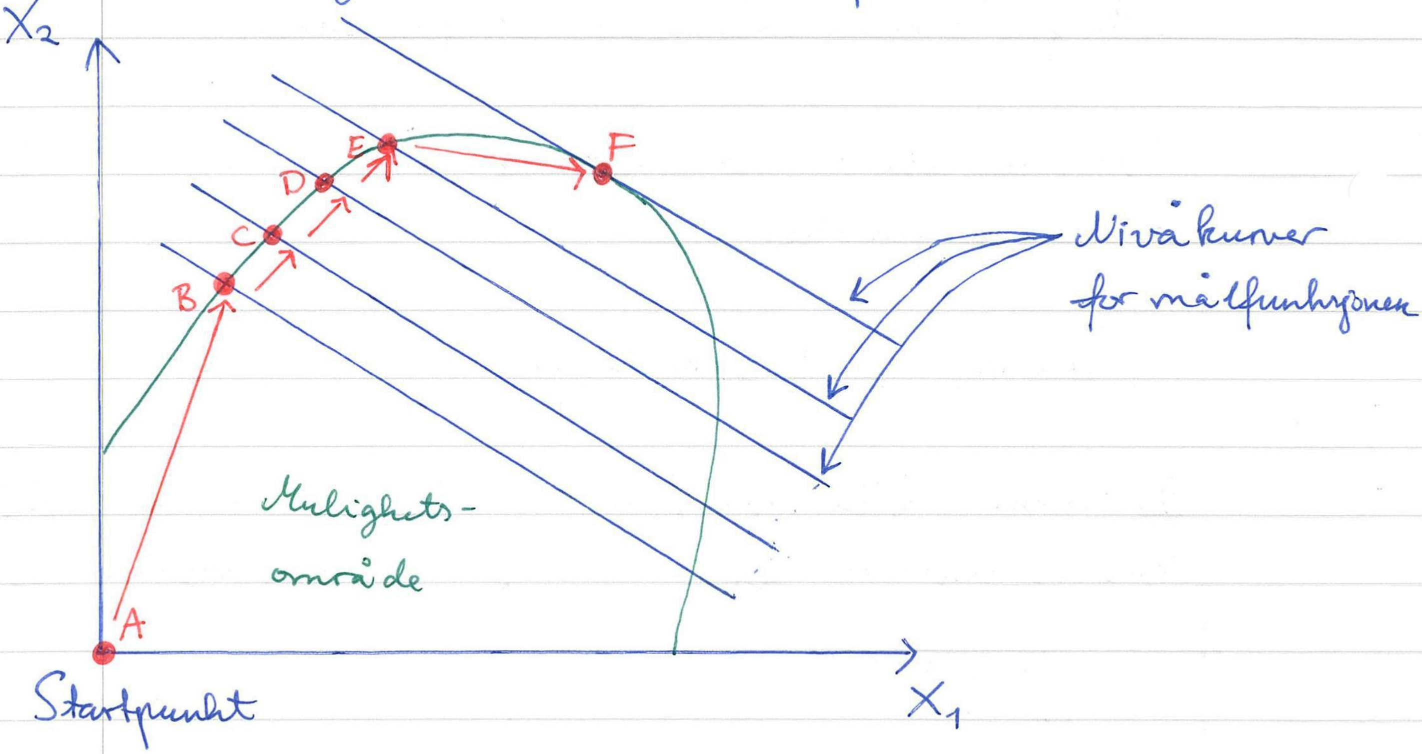
4) Ikke-lineær målfunksjon, lineære begrensninger



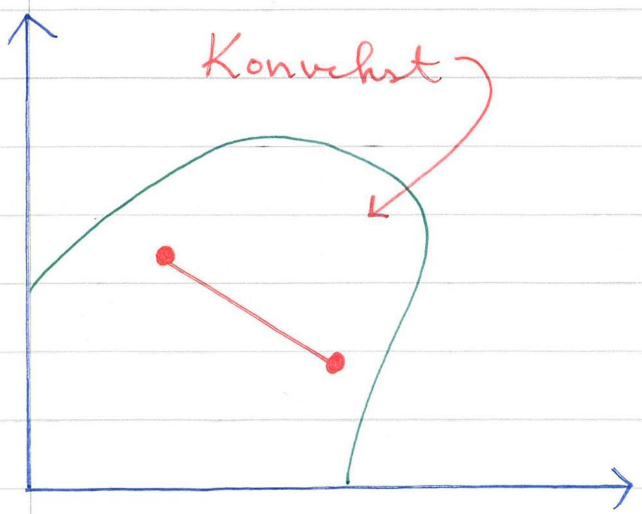
Algoritmen i NLP-problemer: Generalized Reduced Gradient

For NLP-problemer har vi at
optimal løsning ≠ hjørneløsning

Løsningsmetode for NLP-problemer

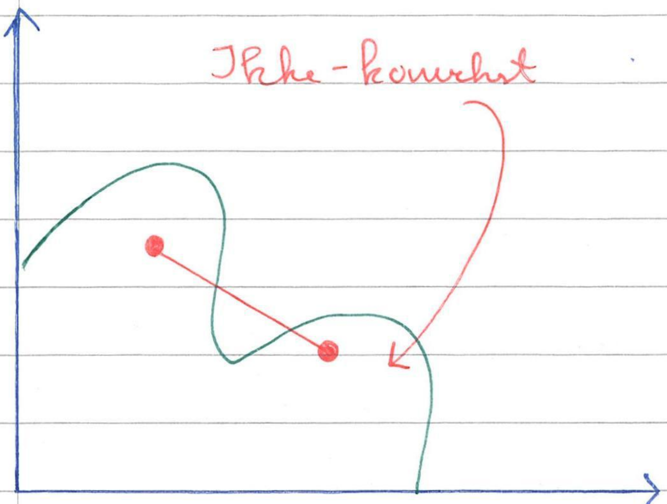


Konveksitet



Dette mulighetsområdet er konvekst. Alle linjer som forbinder to punkter i mulighetsområdet ligger i sin helhet innenfor mulighetsområdet.

Marit Helene Gladhaug, NHH

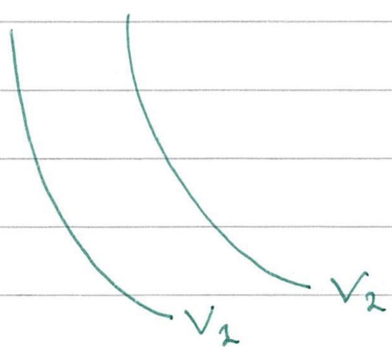


Dette mulighets-området er *ikke* konvekst. Det er mulig å trekke en linje mellom to punkter i området slik at det ikke ligger innenfor mulighetsområdet.

Konvekse modeller

En modell er konveks dersom
- mulighetsområdet er konvekst
- nivåkurvene for målfunksjonen lager konvekse områder på den siden som gir bedre verdi

$V_2 > V_1$



For konvekse modeller vet vi at en optimal løsning også er et globalt optimum.

Startpunkter

- Valg av startpunkt påvirker hvilket lokalt optimum man ender i.
- Unngå null som startpunkt $\Rightarrow (X_1 = 0$ og $X_2 = 0)$
- Om mulig bør man velge startpunkt som har verdier for beslutningsvariablene som har noenlunde tilsvarende verdi som den optimale løsningen.

Meldinger fra Solver

(1) "Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied."

$\Rightarrow$ Det betyr at Solver har funnet et lokalt optimum, men kan ikke garantere at det er et globalt optimum, med mindre NLP-problemet er konveks.

(2) "Solver has converged to the current solution. All constraints are satisfied."

$\Rightarrow$ Det betyr at målfunksjonsverdien har endret seg svært lite i løpet av de siste iterasjonene.

(3) "Solver cannot improve the current solution. All constraints are satisfied."

⇒ Denne meldingen er sjelden og betyr at modellen er degenerert og at Solver har gått inn i en sykel. Degenerasjon kan ofte håndteres ved å fjerne overflødige begrensninger i modellen.

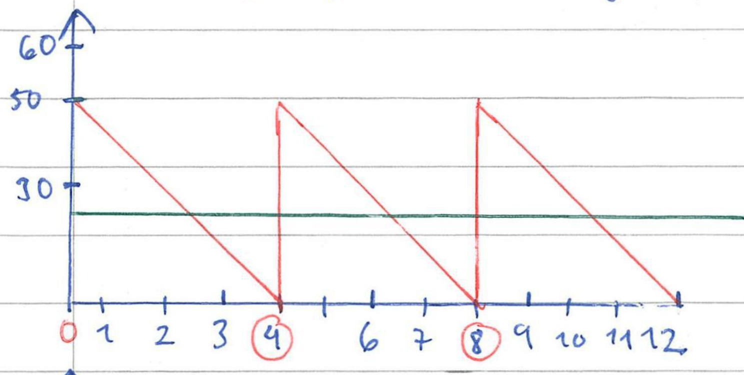
Eksempel 1: Lagerstyring og EOQ-modellen

Hvor mye skal vi kjøpe hver gang vi bestiller en vare?

- Små bestillinger gir
  - lavt nivå på varelageret og lagerholdskostnader
  - hyppige bestillinger og høyere bestillingskostnader

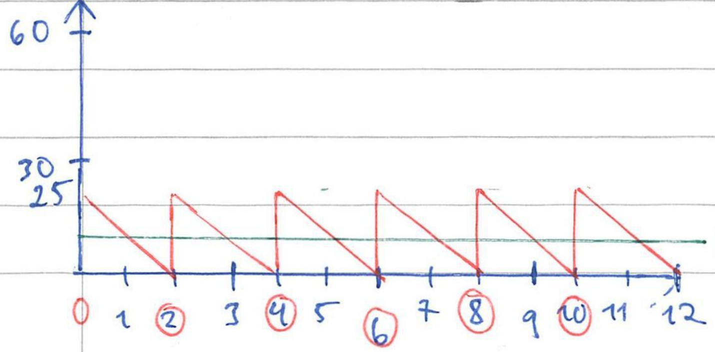
- Store bestillinger gir
  - høyt nivå på varelageret og lagerholdskostnader
  - sjeldne bestillinger og lavere bestillingskostnader

Eksempel på utvikling i lagernivå:



Årlig etterspørsel: 150
Bestillingskvantum: 50
Antall ordrer: 3

Gjennomsnitts-lager = 25 ⇒ (IB+UB):2
= (Q+0):2



Årlig etterspørsel: 150
Bestillingskvantum: 25
Antall ordrer 6

Gjennomsnitts-lager = 12,5

$$\boxed{\text{Gjennomsnittlig lager: } \frac{(IB + UB)}{2}}$$

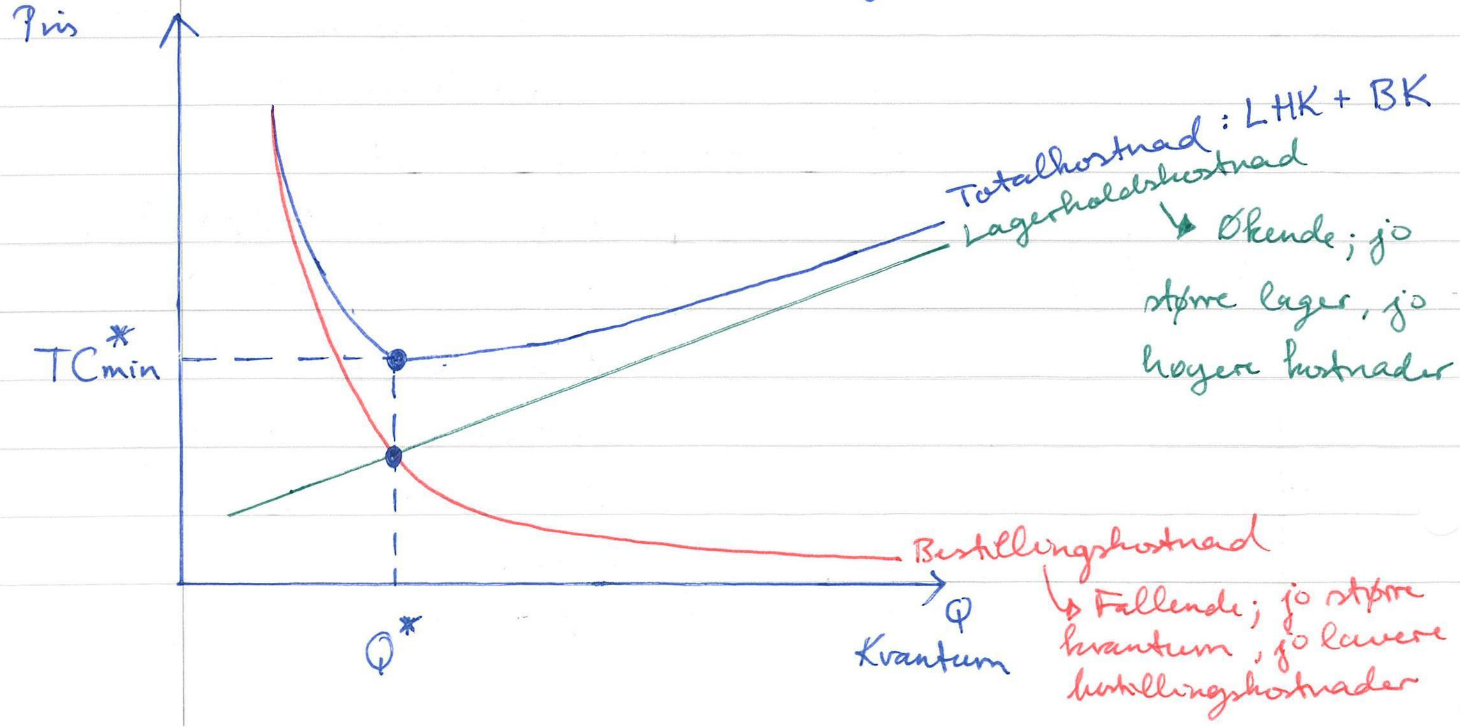
EOQ-modellen:

$$\boxed{\text{Totalkostnaden per år} = DC + \frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2} \cdot Ci}$$

der D = årlig etterspørsel etter produktet
C = innkjøpskostnad per enhet
S = fast kostnad hver gang man bestiller
i = lagerholdskostnad per år (i % av C)
Q = bestillingskvantum

Antar at etterspørselen er jevnt fordelt over året, og at vi mottar nye varer når lagernivået er null.

Kostnad versus bestillingskvantum



Marit Helene Gladhaug, UHH

Eksempel 1: Lagerstyring og EOQ-modellen

- Årlig forbruk er 24000 — $D = 24000$
- Hver enhet koster \$35 — $C = 35$
- Hver bestilling koster \$50 — $S = 50$
- Lagerholdskostnad er 18 % — $i = 0{,}18$

$$C_i = 0{,}18 \cdot 35 = 6{,}3$$

Q: Hva er optimalt bestillingskvantum ?

A: Modellen er gitt ved

$$\text{MIN: } \quad DC + \frac{D}{Q} \cdot S + \frac{Q}{2} \cdot C_i$$

Gitt at: $\quad Q \geq 1 \quad \Rightarrow$ Kun én begrensning

$$\text{MIN: } (24000 \cdot 35) + \left(\frac{24000}{Q} \cdot 50\right) + \left(\frac{Q}{2} \cdot 6{,}3\right)$$

Gitt at $Q \geq 1$

Kommentarer om EOQ

- Den enkleste EOQ-modellen kan lett løses analytisk :

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{C_i}}}$$

Bevis:

Q^* finner vi i skjæringspunktet mellom lagerholdskostnaden og bestillingskostnaden.

$$Q^* \Rightarrow \underbrace{\frac{D}{Q} \cdot S}_{\text{bestillings-kostnad}} = \underbrace{\frac{Q}{2} \cdot C_i}_{\text{lagerholdskostnad}}$$

$$\Rightarrow \frac{D \cdot S}{Q} = \frac{Q \cdot C_i}{2}$$

$$\Rightarrow 2DS = Q(Q \cdot C_i)$$

$$\frac{2DS}{C_i} = \frac{Q^2 \cancel{C_i}}{\cancel{C_i}}$$

$$\sqrt{Q^2} = \sqrt{\frac{2DS}{C_i}}$$

$$\boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{C_i}}}$$

Eksempelet:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2 \cdot 24000 \cdot 50}{0{,}18 \cdot 35}} = \underline{\underline{617{,}21}}$$

Optimalt bestillingskvantum er 617,21.
Antall ordre per år blir $(24000 : 617) \approx \underline{39}$

$$TC = [24000 \cdot 35] + \left[\frac{24000}{617} \cdot 50\right] + \left[\frac{617}{2} \cdot 6{,}3\right] = \underline{\underline{843894}}$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Eksempel 2: Optimering av en investeringsportefølje

Vi ønsker å kombinere tre aksjer i en portefølje slik at risikoen blir så lav som mulig og slik at vi får minst 12 % i forventet avkastning.

Steg 1: Definerer beslutningsvariabler

p_1 = andel av beløpet investert i aksje 1
p_2 = andel av beløpet investert i aksje 2
p_3 = andel av beløpet investert i aksje 3

Steg 2: Definerer målfunksjonen

Målet: Minimerere variansen til porteføljen, altså minimere risikoen.

$$\text{MIN}: \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 p_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_{ij} p_i p_j$$

σ_i^2 = varians av avkastningen til investering i
$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ = kovarians mellom investering i og j

Steg 3: Definerer begrensninger

- **Forventet avkastning:**

$$0{,}0764\, p_1 + 0{,}1343\, p_2 + 0{,}1413\, p_3 \geq 0{,}12$$

- **Andeler:**

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1$$
$$p_1, p_2, p_3 \geq 0$$
$$p_1, p_2, p_3 \leq 1$$

Ulike målsetninger for porteføljen

Vanligvis ønsker vi å
(a) minimere risiko gitt en forventet avkastning
(b) maksimere forventet avkastning gitt en risiko

Vi kan imidlertid håndtere begge målsetninger samtidig:

MAX: $(1-r)\cdot(\text{forventet avkastning}) - r(\text{varians})$

Gitt at: $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

$p_i \geq 0$

der $0 \leq r \leq 1$ er et mål på risikoaversjon.

Merk: $r = 1$ betyr at vi minimerer varians
$r = 0$ betyr at vi maksimerer forventet avkastning

Følsomhetsanalyse

: Sensitivitetsrapporter i NLP har mindre informasjon enn i LP

LP	NLP	Betydning
Skyggepris	Lagrange-multiplikator	Marginalverdi av ressurs
Redusert kostnad → Marginal profitt − Marginal ressursbruk	Redusert gradient	Effekt på målfunksjonsverdien av små endringer i verdien på beslutningsvariablene (X_1 og X_2)

Marit Helene Gladhaug, NHH

Forelesning 6: Simulering

Hva er simulering, og når bruker vi det?

I mange regnearkmodeller er verdien for en eller flere uavhengige variabler ukjent eller usikker. Derfor er også verdien til den avhengige variabelen usikker:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_k)$$

Usikkerhet

Simulering kan brukes til å analysere slike modeller.

Tilfeldige og stokastiske variabler

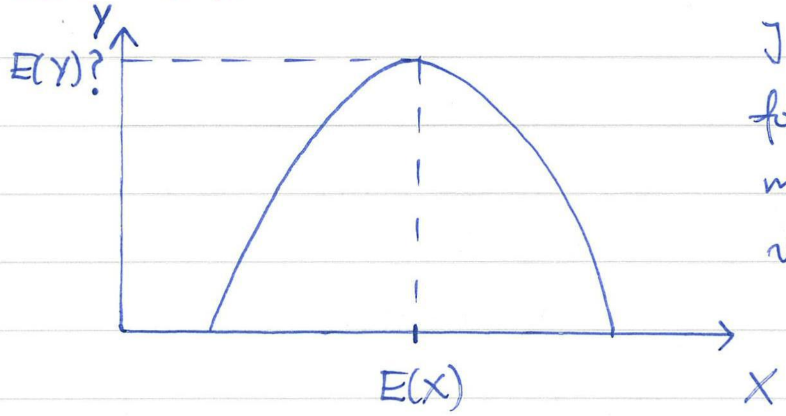
En tilfeldig (stokastisk) variabel er en variabel der vi ikke kan forutsi eller bestemme verdien med sikkerhet. Mange input-celler i typiske regneark-modeller er tilfeldige variabler. Eksempler:

- fremtidig kostnad ved å kjøpe råmaterialer
- rentesatser i fremtiden
- forventet etterspørsel for et produkt
- antall ansatte i et firma i fremtiden

Beslutninger som baseres seg på usikker informasjon er ofte forbundet med risiko. "Risiko" betyr mulighet for tap.

Hvorfor bruke simulering til å analysere risiko?

1. Bruk av "forventede verdier" for tilfeldige variabler kan gi oss feil "forventet verdi" for den avhengige variabelen (Y).



I dette tilfellet er forventet verdi for Y mindre enn maksimumsverdien.

2. Bruk av forventningsverdier for usikre variabler sier oss ikke noe om variasjonen i den resultat-variabelen vi baserer beslutningene våre på.

Anta at en investering på kr 10 000 gir en forventet utbetaling på 100 000 om to år. Ville du investert dersom

(a) utfallene varierer fra 90 000 til 110 000 kr ⇒ liten varians

(b) utfallene varierer fra -300 000 kr til 500 000 ⇒ stor varians (stor risiko)

Merk: alternativer med samme forventningsverdi kan ha ulik grad av risiko.

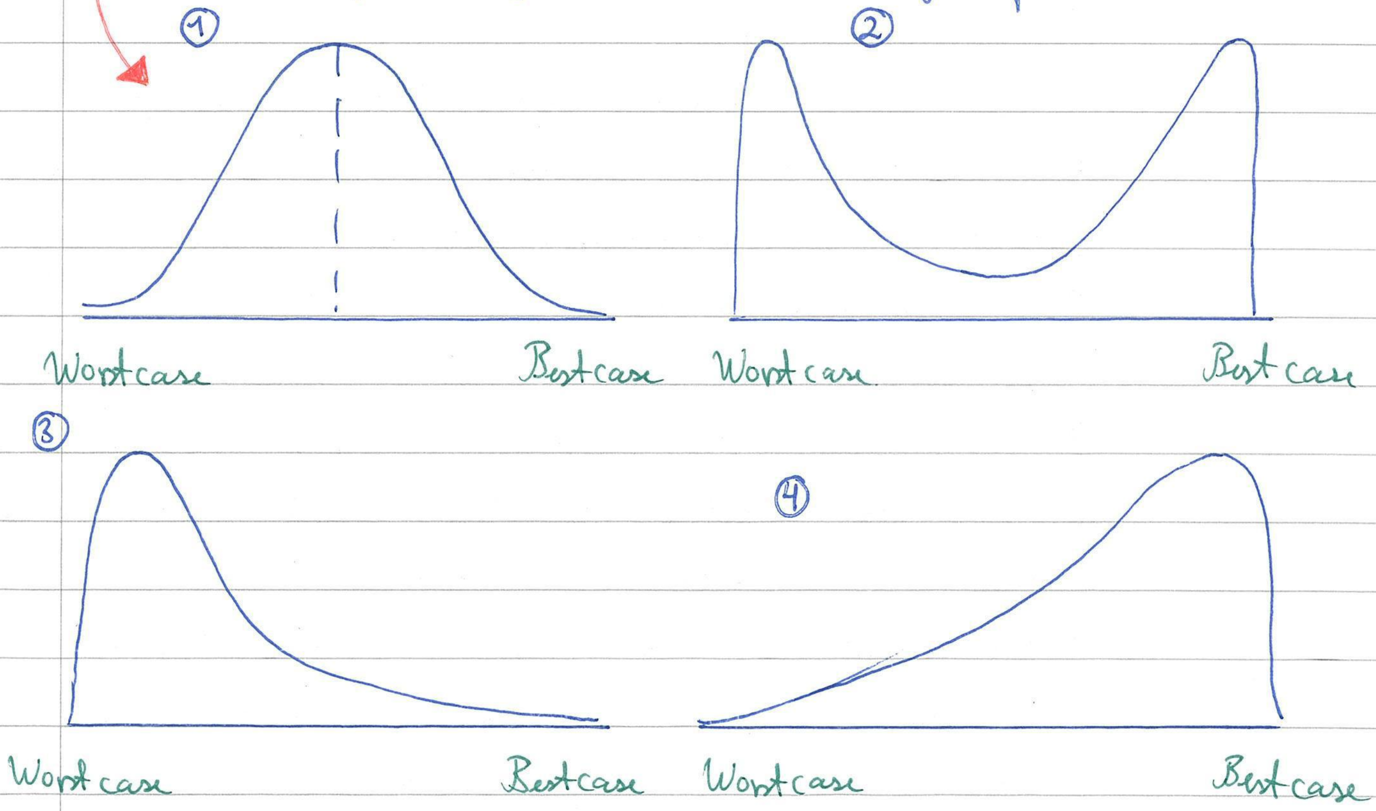
Marit Helene Gladhaug, NHH

Metoder for analyse av risiko

(1) Analyser av best-case/worst-case

- Best-case bruker de mest optimistiske verdiene for hver av de usikre variablene (MAX i utvalget)
- Worst-case bruker de mest pessimistiske verdiene for hver av de usikre variablene (MIN i utvalget)
- Fordel: lett å utføre
- Ulempe: sier oss ingenting om den statistiske fordelingen til de ulike utfallene

Ulike fordelinger med ulike ytterpunkter:



Her kan worst case og best case være den samme for ulike situasjoner, men sannsynligheten for den mest positive og mest negative verdien varierer svært mye fra situasjon til situasjon.

(2) Følsomhetsanalyser

- Prøve ulike verdier for de usikre variablene og se hva som skjer
- Fordel: lett å utføre med regneark
- Ulempe:
  - valg av verdier baserer seg på bruk av menneskelig skjønn og kan gi skjevheter i resultatene
  - vi trenger svært mange scenarioer for å lage en representativ fordeling
  - vanskelig å bruke som objektivt grunnlag for beslutninger

(3) Simulering

- En <u>automatisert</u> følsomhetsanalyse
- Verdier for de usikre variablene velges av datamaskinen uten bruk av menneskelig skjønn
- Datamaskinen genererer et stort antall scenarier.
- Vi analyserer resultatene fra scenariene for å forstå hvordan resultatvariablene vil oppføre seg
- Dette gir oss et realistisk "laboriatorium" der vi kan beregne effekten av beslutninger

For å kartlegge risikoen i modellen kan vi bruke simulering.

Simulering består av fire steg:

Marit Helene Gladhaug, NHH

Steg 1: Identifiser de usikre variablene (regnearkcellene) i modellen.

Steg 2: Velg passende slumptallgenerator for de usikre variablene. [Psi()-funksjon]

Steg 3: Simuler n trekninger av verdier for de usikre variablene, og bruk modellen til å beregne n observasjoner for resultatvariablene i modellen. Marker resultatcellen med + PsiOutput() for å lagre de n trekningene i modellen.

Steg 4: Analyser observasjonene av resultatvariablene i utvalget. Trykk på resultatcellen eller bruk ulike Psi-funksjoner.

Hva er en slumptallgenerator?

En slumptallgenerator (RNG = Random Number Generator) er en matematisk funksjon som genererer tilfeldige tall fra en sannsynlighetsfordeling.

Vi implementerer slumptallgenerator for usikre celler slik at vi kan trekke verdier fra de fordelingene som vi antar.

Dette gjør vi ved å markere de usikre cellene med en Psi-funksjon der vi legger inn parametrene for hver sannsynlighetsfordeling. Eksempel: PsiNormal(μ, σ) dersom vi antar at den usikre cellen er normalfordelt med forventning μ og standardavvik σ.

Noen av slumptallgeneratorene i Analytic Solver

Merk: én generator for hver fordeling. (for hver usikker celle)

Fordeling	Slumptallgenerator i ASP
Binomisk	PsiBinomial (n, p)
Kjikvadrat	PsiChisquare (λ)
Poisson	PsiPoisson (λ)
Uniform	PsiUniform (min, max)
Normal	PsiNormal (μ, σ)
Trunkert normal	PsiNormal [μ, σ,
*	$\underbrace{\text{PsiTruncate (min, max)}}_{\text{ekstra ledd}}$])

Usikkerhet i estimater

- Trekningene i modellen kan ses som et utvalg fra en uendelig populasjon av alle mulige trekninger
- Sett at vi gjentok simuleringen og tar et nytt utvalg av samme størrelse. Da vil vi ikke få de samme resultatene!
- Når utvalgsstørrelsen (antall trekninger) øker, vil estimatene basert på utvalget konvergere mot de samme verdiene for populasjonen.
- Vi kan lage konfidensintervaller for å si noe om usikkerheten i estimatene våre.

* PsiLogNormal (μ, σ) → Lognormalfordelt variabel.
eg. gjenværende levеår for klienten i Case 3. (12.1)

Marit Helene Gladhaug, NHH

95% - konfidensintervall for gjennomsnitt

PriMeanCI() angir halve bredden av konfidens-intervallet.

$$\boxed{\left[\bar{y} - 1,96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{y} + 1,96 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]}$$

$\bar{y}$ = gjennomsnitt for utvalget
S = standardavvik for utvalget
n = antall trekninger i utvalget ($n \geq 30$)

Når n øker vil konfidensintervallet bli smalere fordi estimatene blir mindre usikre.

95%- konfidensintervall for estimatet av en andel i populasjonen

$$\boxed{\left[\bar{p} - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \;,\; \bar{p} + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}}\right]}$$

$\bar{p}$ = andel-estimatet basert på et utvalg
n = antall trekninger i utvalget ($n \geq 30$)

Igjen ser vi at når n øker, vil konfidensintervallet bli smalere grunnet mindre usikkerhet.

Simuleringsmodeller med beslutninger

- Simulering brukes til å beskrive hvordan viktige resultatvariabler reagerer på variasjon i usikre variabler.
- Noen input-variabler kan være kontrollert av beslutningstakere.
- Vi kan også bruke simulering til å finne optimale verdier for beslutningsvariablene.

Begrensninger med risiko

- Value at Risk (VaR)
  Angir hvor mange % av trekningene som kan overskride begrensningen

- Condition Value at Risk (CVaR)
  Angir en grense for hvor mye en begrensning i gjennomsnitt kan overskrides.

Psi-funksjoner for å analysere resultater fra Psi Output()

(1) PsiMax(X) : Maksimum for resultatcelle X
(2) PsiMin(X): Minimum for resultatcelle X
(3) PsiMean(X): Gjennomsnitt for resultatcelle X
(4) PsiStdDev(X): Standardavvik for resultatcelle X
(5) PsiPercentile(X, y): Gir verdien x slik at $P(X < x) = y$
(6) PsiTarget(X, y): Gir sannsynligheten $P(X < y)$
(7): PsiExpLoss(X): Forventet tap $E(X \mid X < 0) \cdot P(X < 0)$
(8): PsiExpGain(X): Forventet gevinst $E(X \mid X > 0) \cdot P(X > 0)$
(9): PsiCVar(X, y): Gj.snitt for andel y av de laveste verdiene for X (eg. gj.snitt for de 5% laveste verdiene)

Marit Helene Gladhaug, NHH

Forelesning 7 : Beslutningsanalyse

Merk : Dette er en svært eksamensrelevant forelesning !

Gode beslutninger vs. gode resultater

- En strukturert tilnærming til beslutningsprosesser kan hjelpe oss med å ta gode beslutninger, men kan ikke garantere gode resultater.
- Gode beslutninger fører noen ganger til dårlige resultater.

	Godt resultat	Dårlig resultat
God beslutning	Fortjent resultat	Uflaks
Dårlig beslutning	Flaks/Dumb luck	Poetisk rettferdighet

Karakteristika ved beslutningsproblemer

(1) Alternativer ; forskjellige handlinger som kan løse et problem

- Arbeide for bedrift A (a_1)
- Arbeide for bedrift B (a_2)
- Avvise begge jobbtilbudene og fortsette å lete (a_3)

(2) Kriterier ; faktorer som er viktige for beslutningstakeren og påvirkes av alternativene.

- Lønn

- Karrieremuligheter
- Lokalisering

(3) Tilstander; fremtidige hendelser som ikke er under beslutningstakerens kontroll
- Bedrift A vokser (S_1)
- Bedrift A overlever ikke (S_2)

Eksempel 1: Investeringsprosjekt; ny flyplass

	Område	
	A	B
Dagens kjøpspris	18	12
Nåverdi fremtidig KS hvis flyplass bygges i nærheten	31	23
Nåverdi fremtidig KS hvis ikke flyplass bygges i nærheten	6	4

Dilemma: Ønsker å kjøpe nå fordi prisene vil øke i fremtiden, men vi vet ikke hvor flyplassen blir bygget.

Beslutningsalternativer

(1) Kjøpe tomt i område A (a_1)
(2) Kjøpe tomt i område B (a_2)
(3) Kjøpe begge tomtene (a_3)
(4) Kjøpe ingen av tomtene (a_4)

Marit Helene Gladhaug, NHH

Mulige tilstander

(1) Den nye flyplassen bygges i område A (S_1)
(2) Den nye flyplassen bygges i område B (S_2)

→ Det er her usikkerheten befinner seg. Vi vet ikke hvilken tilstand som vil inntreffe.

Beslutningstabell [Pay Off Matrix]

	Flyplass bygges i område	
Tomt kjøpes i område	S_1 : A	S_2 : B
a_1: A	31 − 18 = 13	6 − 18 = −12
a_2: B	4 − 12 = −8	23 − 12 = 11
a_3: A & B	[31 + 4] − [18 + 12] = 5	[6 + 23] − [18 + 12] = −1
a_4: Ingen	0	0

Beslutningsregler

Hvis fremtidig tilstand (lokalisering av flyplass) var kjent, ville det vært enkelt å ta en beslutning. Siden det ikke er tilfellet, kan en rekke ikke-probalistiske beslutninger brukes på dette problemet.

1. Maximax (max av max)
2. Maximin (max av min)
3. Minimax beklagelse (min av max)

Steg 2: Finner differansen mellom hvert alternativ og din maksimale gevinsten for hver tilstand. Dette angir hvor mye man angrer på valget sitt, fordi ved å ha valgt noe annet, kunne man ha vunnet en større gevinst. Merk at beklagelsen er en absolutt verdi.

- Beregn beklagelsen for hvert beslutningsalternativ for hver mulig tilstand (Beste KV ved s_i − KV)
- Finn største mulige (= maksimal) beklagelse for hvert beslutningsalternativ
- Velg alternativet med den minste beklagelsen

Beklagelsesmatrisen

	Tilstand		
Alternativ	A	B	MAX
A	13−13 = 0	|−12−11| = 23	23
B	|−8−13| = 21	|11−11| = 0	21
A & B	|5−13| = 8	|−1−11| = 12	12 ← Minimum
Ingen	|0−13| = 13	|0−11| = 11	13

Oppsummert: Tre ikke-probalistiske beslutningsregler
(1) Maximax : velger maximum av maks utbetaling
(2) Maximin : velger maximum av minimum utbetaling
(3) Minimax beklagelse : velger minimum av maximum beklagelse

Marit Helene Gladhaug, NHH

Metoder som bruker tilstandssannsynligheter

Noen ganger kan tilstandene tilordnes sannsynligheter som representerer sjansen for at de inntreffer.

(1) Forventet verdi : EMV , Expected Monetary Value
Vi velger alternativet med høyest forventet verdi.

$$EMV_i = \sum r_{ij} \cdot p_j$$

r_{ij} = payoff for alternative i under the jth state of nature
p_j = the probability of the jth state of nature

EMV_i er den gjennomsnittlige utbetalingen vi vil få hvis vi møter samme beslutningsproblem mange ganger og alltid velger i.

	Tilstand		
Alternativ	A	B	EMV
A	13	-12	-2
B	-8	11	3,4 Maximum
A & B	5	-1	1,4
Ingen	0	0	0
Sannsynlighet	0,4	0,6	

$$EMV_A = 0{,}4 \cdot 13 + 0{,}6 \cdot (-12) = -2$$

$EMV_B = 0,4 \cdot (-8) + 0,6 \cdot 11 = 3,4$

$EMV_{A\&B} = 0,4 \cdot 5 + 0,6 \cdot (-1) = 1,4$

$EMV_{ingen} = 0$

Merk! EMV-regelen bør brukes med forsiktighet i beslutninger som bare tas én gang, fordi den ikke tar hensyn til varians (risiko). ⇒ Brukes når beslutningstaker er risikonøytral.

(2) Forventet beklagelse : EOL, Expected Opportunity Loss

Vi velger alternativet med minimum forventet beklagelse. Dette er alternativet som gjør at vi angrer minst, gitt tilstandssannsynlighetene.

$$EOL_i = \sum_j g_{ij} \cdot p_j$$

g_{ij} = regret for alternative i under the jth state of nature

p_j = the probability of the jth state of nature

Merk: Beslutningen med størst EMV vil også ha minst EOL!

	Tilstand		
Alternativ	A	B	EOL
A	0	23	13,8
B	21	0	8,4 ← Minimum
A+B	8	12	10,4
Ingen	13	11	11,8
Sannsynlighet	0,4	0,6	

Marit Helene Gladhaug, NHH

$EOL_A = 0{,}4 \cdot 0 + 0{,}6 \cdot 23 = 13{,}8$

$EOL_B = 0{,}4 \cdot 21 + 0{,}6 \cdot 0 = 8{,}4$

$EOL_{A+B} = 0{,}4 \cdot 8 + 0{,}6 \cdot 12 = 10{,}4$

$EOL_{ingen} = 0{,}4 \cdot 13 + 0{,}6 \cdot 11 = 11{,}8$

(3) The Expected Value of Perfect Information (EVPI)

Anta at vi kan hyre en konsulent som kan forutsi fremtiden med 100 % sikkerhet. Med slik perfekt informasjon får vi:

$$EV \text{ med } PI = 0{,}4 \cdot 13 + 0{,}6 \cdot 11 = 11{,}8$$

De høyeste konsekvensverdiene for hver tilstand

Uten perfekt informasjon er EMV = 3,4.

Forventet verdi av perfekt informasjon er derfor:

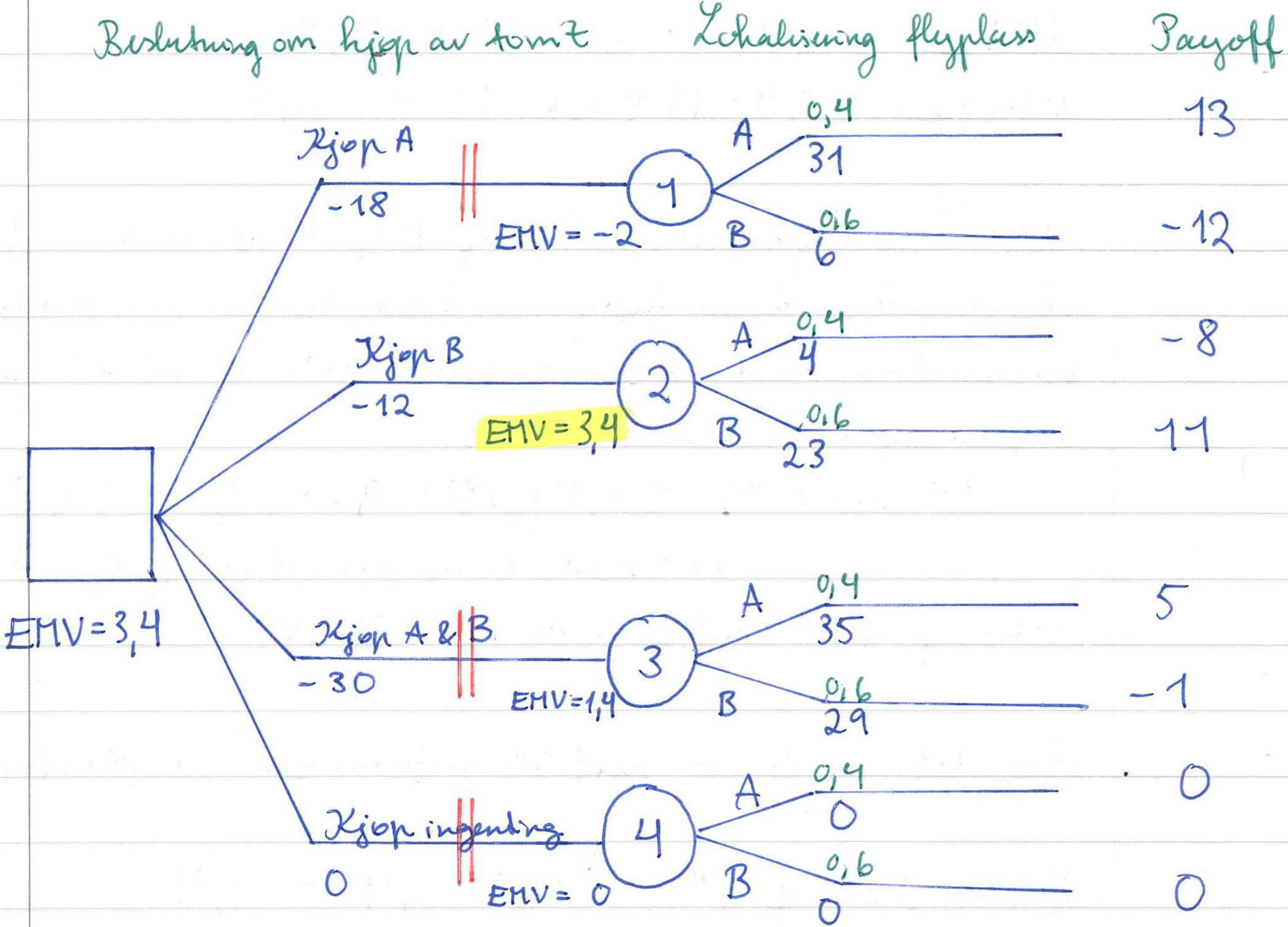
EVPI ("EV of PI") = 11,8 − 3,4 = 8,4

$$\boxed{\text{Generelt: } EVPI = EV \text{ med } PI - \text{maximum } EMV}$$

Det vil alltid være slik at

$$\boxed{EVPI = \text{minimum } EOL}$$

Beslutningstre for investeringsproblemet



Bruk av tilleggsinformasjon i beslutningsprosesser

Vi kan ofte skaffe informasjon om mulige utfall av avgjørelser før beslutninger tas. Denne tilleggsinformasjonen tillater oss å justere sannsynlighetsestimater knyttet til slike utfall.

Eksempel: Colonial Motors

Colonial Motors må avgjøre om det skal bygges en stor eller liten fabrikk for en ny bil som utvikles.

Marit Helene Gladhaug, UHH

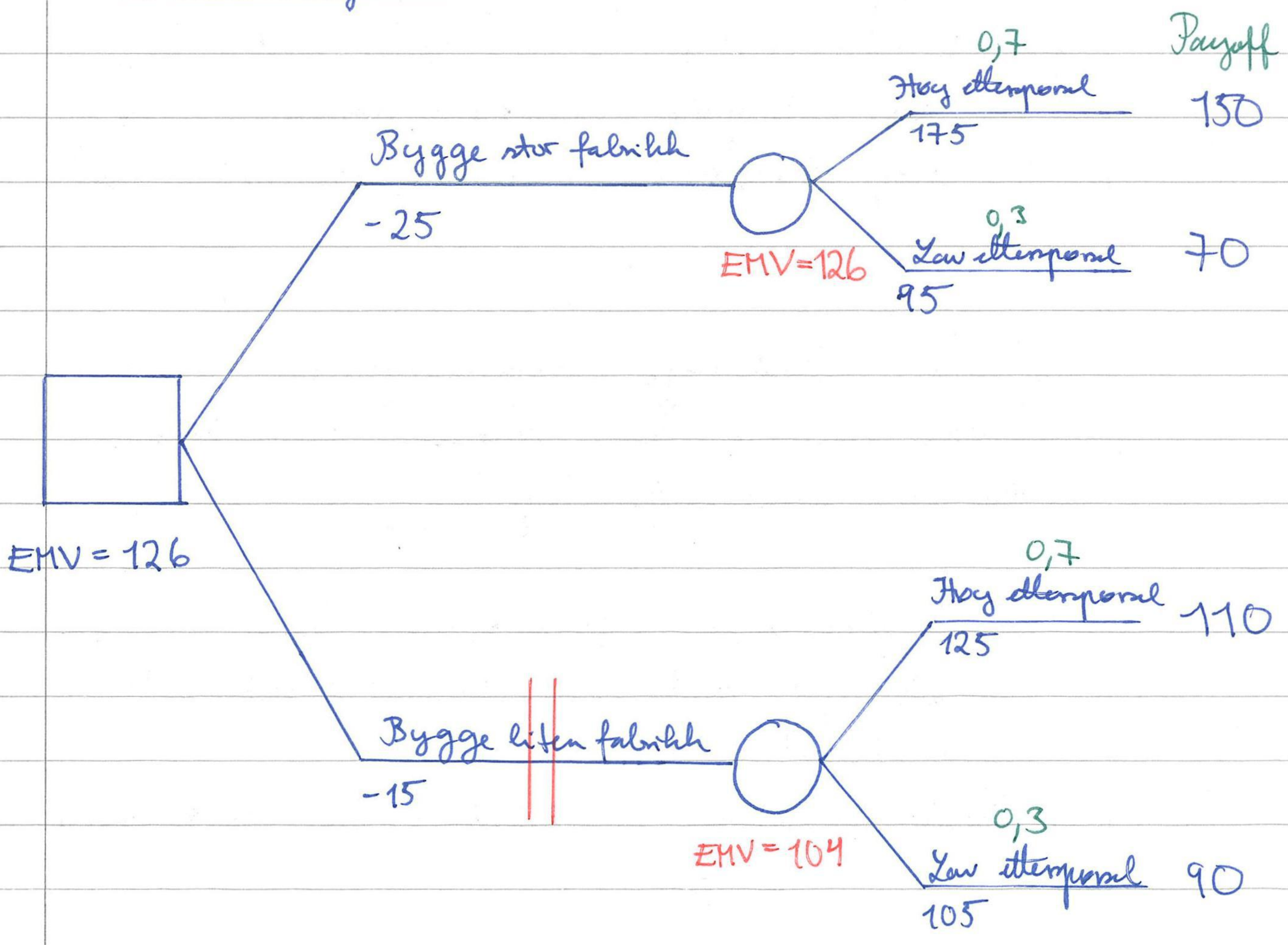
Kostnaden med å bygge en stor fabrikk er 25 millioner mens kostnaden for en liten fabrikk er 15 millioner. CM mener det er 70 % sjanse for at etterspørselen etter den nye bilen vil være høy og 30 % sjanse for at den blir lav.

Utbetalingene i millioner er følgende:

	Etterspørsel	
Fabrikkstørrelse	Høy	Lav
Stor	175	95
Liten	125	105

Merk: Må huske å trekke fra byggekostnadene.

Beslutningstre



Marit Helene Gladhaug, NHH

Inkludert tilleggsinformasjon

- Før beslutningen tas, anta at CM gjennomfører en kundeundersøkelse (kostnadsfritt).
- Undersøkelsen kan indikere gunstige eller ugunstige holdninger til den nye bilen. Anta:

  P(gunstig respons) = 0,67

  P(ugunstig respons) = 0,33
- Hvis responsen er gunstig, bør dette øke CMs tro på at etterspørselen vil være høy. Anta:

$P(s_i \mid \text{Utsagn } j)$

  P(høy etterspørsel | gunstig respons) = 0,9

  P(lav etterspørsel | gunstig respons) = 0,1
- Hvis responsen er ugunstig, bør dette øke CMs tro på at etterspørselen vil være lav. Anta:

  P((lav etterspørsel | ugunstig respons) = 0,7

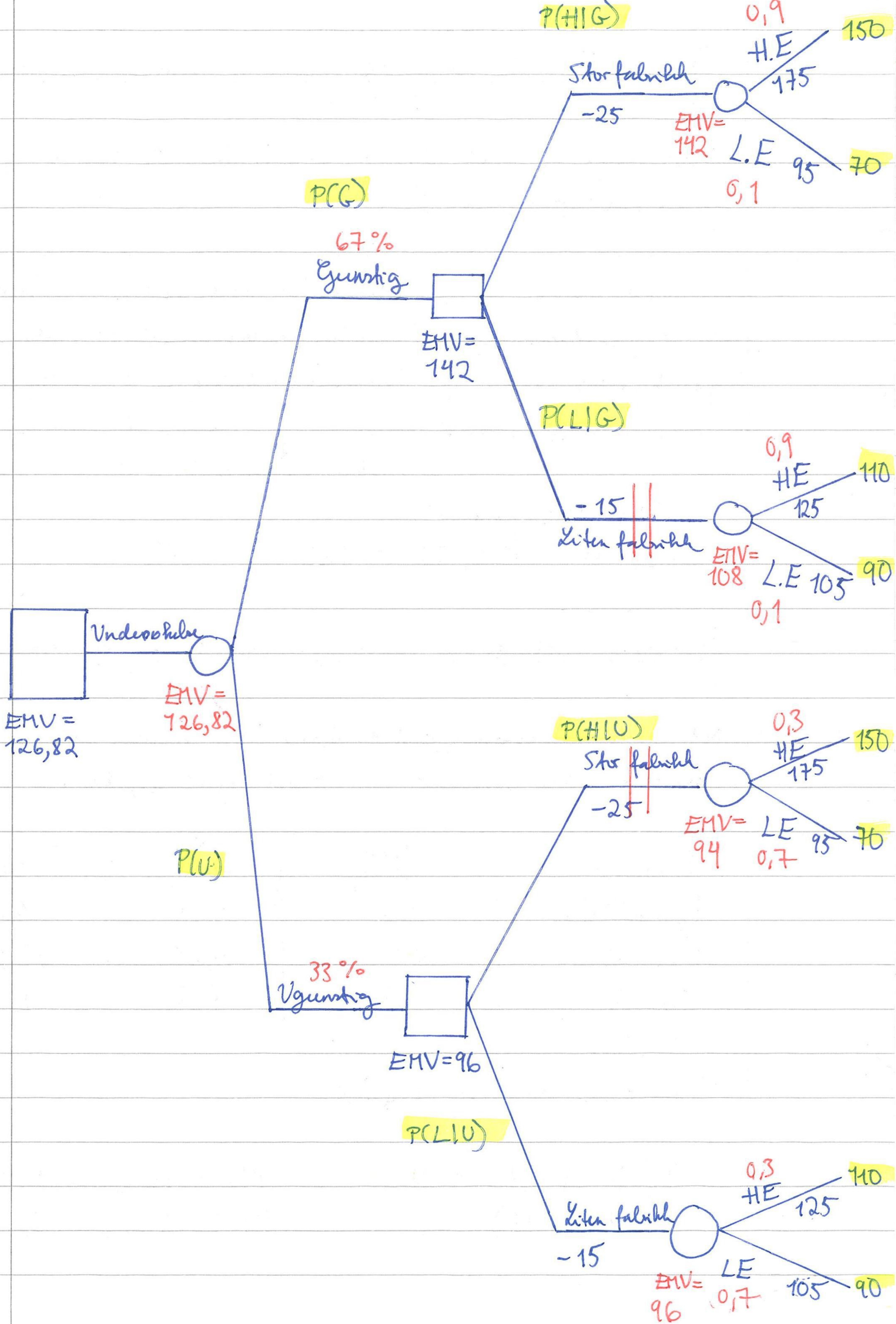
  P(høy etterspørsel | ugunstig respons) = 0,3

Merk: Den nye informasjonen har verdi fordi vi kan tilpasse beslutningen til den nye informasjon.

Med den nye informasjonen kan vi sette opp et nytt beslutningstre, med betinget sannsynlighet.

Beslutningstreet er illustrert på neste side.

Marit Helene Gladhaug, NHH



Marit Helene Gladhaug, NHH

The Expected Value of Sample Information (EVSI)

Hvor mye er CM villig til å betale for å gjennomføre kundeundersøkelsen?

Forventet verdi av tilleggsinformasjon/ imperfekt informasjon	=	Forventet verdi med tilleggsinformasjon/ imperfekt informasjon	−	Forventet verdi uten tilleggsinfo/ imperfekt info

Uten kostnader!

I CM eksempelet:

EVSI = 126,82 − 126 = 0,82

Beregne betingede sannsynligheter

Eksamensrelevant

Betingede sannsynligheter kan ofte regnes ut fra oversikter over simultane sannsynligheter.

Respons	Høy ettersp.	Lav ettersp.	Total
Gunstig	0,6	0,067	0,667
Ugunstig	0,1	0,233	0,33
Total	0,7	0,3	1

Simultane sannsynligheter:

$P(G \cap H) = 0{,}6$ $\quad$ $P(G \cap L) = 0{,}067$

$P(U \cap H) = 0{,}1$ $\quad$ $P(U \cap L) = 0{,}233$

Marit Helene Gladhaug, NHH

I tillegg er : $P(G) = 0,667$ $P(U) = 0,33$

$P(H) = 0,7$ $P(L) = 0,3$

$$\boxed{\text{Generelt er :} \quad P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Slik at :

$$P(H|G) = \frac{P(H \cap G)}{P(G)} = \frac{0,6}{0,667} = \underline{\underline{0,9}}$$

$$P(L|G) = \frac{P(L \cap G)}{P(G)} = \frac{0,067}{0,667} = \underline{\underline{0,10}}$$

$$P(H|U) = \frac{P(H \cap U)}{P(U)} = \frac{0,1}{0,33} = \underline{\underline{0,30}}$$

$$P(L|U) = \frac{P(L \cap U)}{P(U)} = \frac{0,233}{0,33} = \underline{\underline{0,70}}$$

Videre :

$$P(G|H) = \frac{P(G \cap H)}{P(H)} = \frac{0,6}{0,7} = \underline{\underline{0,857}}$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

$$P(U \mid H) = \frac{P(U \cap H)}{P(H)} = \frac{0,1}{0,7} = \underline{\underline{0,143}}$$

$$P(G \mid L) = \frac{P(G \cap L)}{P(L)} = \frac{0,067}{0,3} = \underline{\underline{0,223}}$$

$$P(U \mid L) = \frac{P(U \cap L)}{P(L)} = \frac{0,233}{0,3} = \underline{\underline{0,777}}$$

Bayes' lov

Bayes' lov gir en annen definisjon av betingede sannsynligheter som kan være nyttig.

$$\boxed{P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B \mid A) \cdot P(A) + P(B \mid A^c) \cdot P(A^c)}}$$

Utility Theory

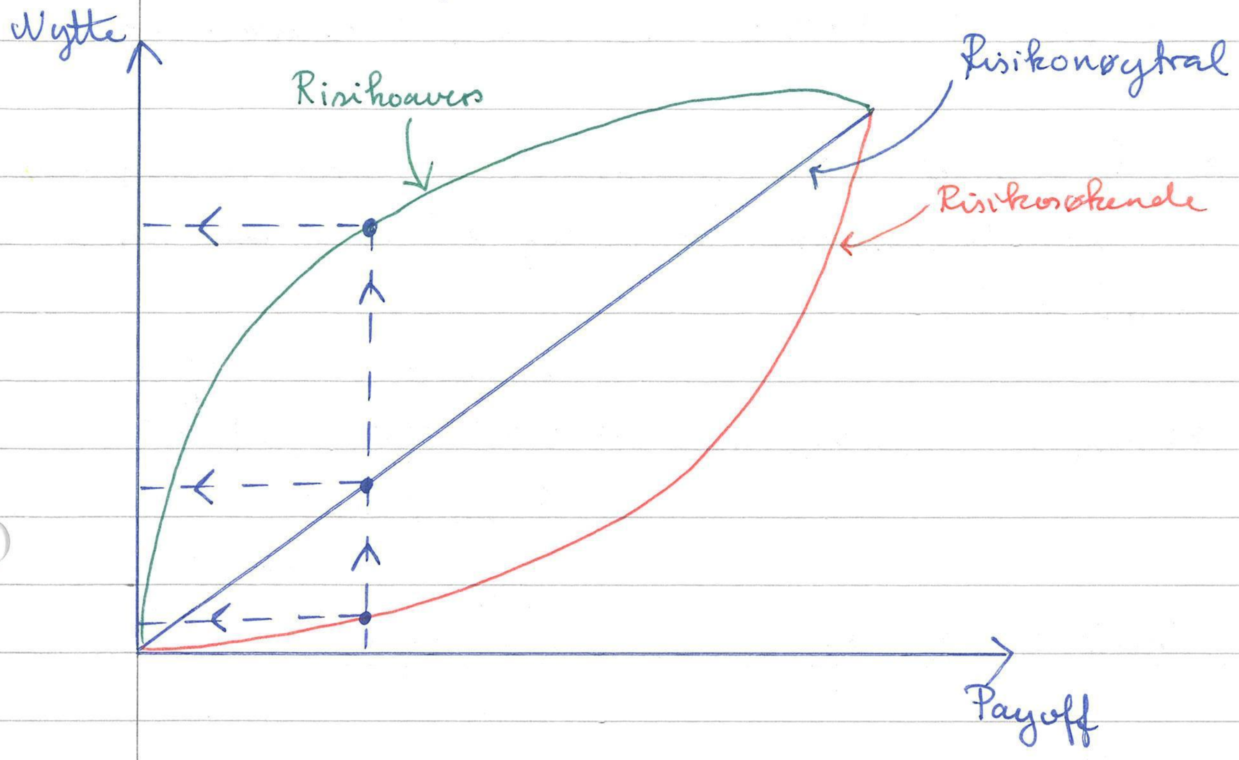
Noen ganger er beslutningen med høyest forventet verdi ikke det mest ønskede eller foretrukne alternativet.

Beslutningstakere har ulike holdning til risiko.

Nytteteori inkluderer risikopreferanser i beslutningsprosessen.

Marit Helene Gladhaug, NHH

Vanlige nyttefunksjoner



Risikoavers : Konkav nyttefunksjon
Risikonøytral : Lineær nyttefunksjon
Risikosøkende : Konveks nyttefunksjon

Sikkerhetsekvivalent [CE : Certainty Equivalent]

Sikkerhetsekvivalent : Det sikre beløpet som beslutningstakeren mener er ekvivalent med et usikkert alternativ, dvs en situasjon som medfører risiko.

Eksempel : \$70 000 er like godt som å motta \$150 000 med sannsynlighet 0,8 og tape \$30 000 med sannsynlighet 0,2.

$EV = 0{,}8 \cdot 150\,000 + 0{,}2 \cdot (-30\,000) = 114\,000$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Det innebærer at \$70 000 uten risiko gir samme nytte som \$114 000 med risiko. ⇒ Risikoavers

Risikopremie (Risk premium) er forventningsverdien som beslutningstaker er villig til å gi opp for å unngå risiko.

Eksempel: Risikopremie $= \underbrace{\overset{\text{Usikkert}}{\$114\,000} - \overset{\text{Sikkert}}{\$70\,000}}_{\text{Gir samme nytteverdi}}$
$= \$44\,000$

Bruke nytte til å ta beslutninger

Erstatt pengebeløpene i beslutningstabellen med nytte.

Eksempel:

Beslutning	Tilstand 1	Tilstand 2	Forventet nytte
A	1	0	0,5
B	0,8	0,65	0,725 Maximum
Sannsynlighet	0,5	0,5	

Beslutning B gir høyest nytte.

$EU_A = 0,5 \cdot 1 + 0,5 \cdot 0 = \underline{0,5}$
$EU_B = 0,5 \cdot 0,8 + 0,5 \cdot 0,65 = \underline{0,725}$

Merk: Dersom jeg kun har konsekvensverdiene oppgitt må jeg gjøre om hver konsekvensverdi til nytteverdi, ved å plugge konsekvensverdiene inn i nyttefunksjonen. $U(C)$ = nytteverdi

Marit Helene Gladhaug, NHH

Forelesning 8: Tidsserieprognoser

Introduksjon til tidsserieanalyse

- En tidsserie er en mengde av observasjoner av en kvantitativ variabel, som er samlet over tid.

- Eksempler: børsindekser
  historiske data om salg, lager, kunde-konti, renter, kostnader

- Virksomheter er ofte interessert i å predikere tidsserie-variabler.

- Ofte har vi ikke tilgang til uavhengige variabler for å lage regresjonsmodeller for tidsserievariabler.

- I tidsserieanalyser analyserer vi hvordan en variabel tidligere har oppført seg, for å kunne forutsi fremtidig oppførsel

Noen tidsseriebegreper

- Stasjonære data: en tidsserievariabel som ikke viser noen signifikant oppadgående eller nedadgående trend over tid

- Ikke-stasjonære data: en tidsserievariabel som viser

Marit Helene Gladhaug, NHH

signifikant oppadgående eller nedadgående trend over tid

- Data med sesongtrend : en tidsserievariabel som viser mønstre som repeteres med jevne mellomrom over tid.

Måle nøyaktighet

$$\boxed{MSE = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n}}$$

→ Det er MSE som viser hvor nøyaktig prognosene våre er. Lavere MSE ⇒ mer nøyaktig (mindre avvik)

Ekstrapoleringsmodeller

Ekstrapoleringsmodeller prøver å ta hensyn til tidligere oppførsel til en tidsserievariabel i et forsøk på å forutsi fremtidig oppførsel til variabelen.

$$\boxed{\underbrace{\hat{Y}_{t+1}}_{\text{Prognose}} = f(\underbrace{Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, \ldots}_{\text{Historiske}})}$$

(1) Glidende gjennomsnitt :

$$\boxed{\hat{Y}_{t+1} = \frac{Y_t + Y_{t-1} + \ldots + Y_{t-k+1}}{k}}$$

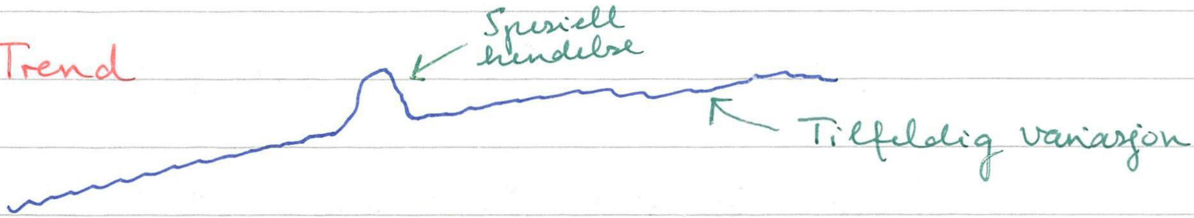
(2) Eksponentiell glatting : $\boxed{\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha(Y_t - \hat{Y}_t)}$

hvor $0 \leq \alpha \leq 1$

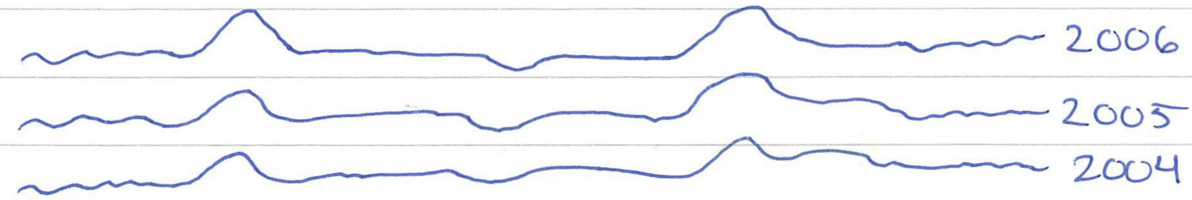
Marit Helene Gladhaug, NHH

Mønstre i tidsseriedata

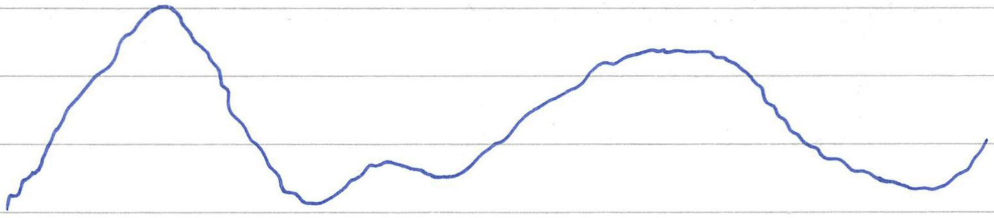
(1) Trend



(2) Sesongvariasjoner

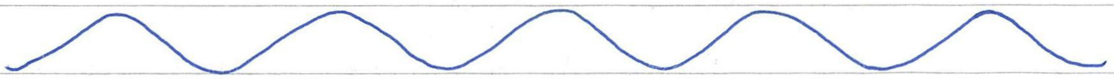


(3) Sykler

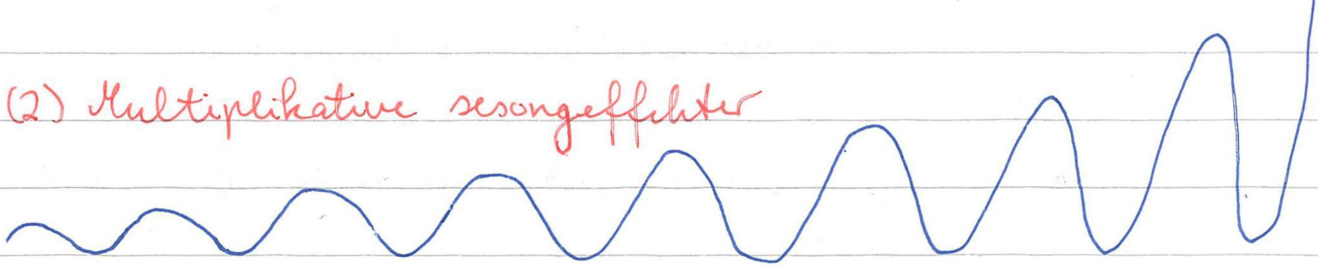


Stasjonære sesongeffekter

(1) Additive sesongeffekter : Variasjonene er lik over tid



(2) Multiplikative sesongeffekter



Variasjonene blir mer fremtredende over tid.

Marit Helene Gladhaug, NHH

Stasjonære tidsserier med additiv sesongeffekt

$$\boxed{\hat{Y}_{t+n} = E_t + S_{t+n-p}}$$

hvor
$$E_t = \alpha(Y_t - S_{t-p}) + (1-\alpha)E_{t-1}$$
$$S_t = \beta(Y_t - E_t) + (1-\beta)S_{t-p}$$
$$0 \leq \alpha \leq 1$$
$$0 \leq \beta \leq 1$$

p = antall sesonger *

E_t = forventet nivå for tidsperiode t

S_t = sesongfaktoren i tidsperiode t

Stasjonære tidsserier med multiplikativ sesongeffekt

$$\hat{Y}_{t+n} = E_t \cdot S_{t+n-p}$$

hvor
$$E_t = \alpha(Y_t / S_{t-p}) + (1-\alpha)E_{t-1}$$
$$S_t = \beta(Y_t / E_t) + (1-\beta)S_{t-p}$$
$$0 \leq \alpha \leq 1$$
$$0 \leq \beta \leq 1$$

p = antall sesonger

E_t = forventet nivå for tidsperiode t

S_t = sesongfaktoren i tidsperiode t

* Eg. Dersom vi har kvartalsvise data blir $p = 4$. (Det er 4 kvartaler i ett år)

Marit Helene Gladhaug, NHH

Modeller med trend

Trend er den langsiktige hovedbevegelsen i en tidsserie. Vi vil se på noen ikke-stasjonære teknikker som passer for data som viser oppadgående eller nedadgående trend.

Dobbelt glidende gjennomsnitt:

$$\boxed{\hat{Y}_{t+n} = E_t + nT_t}$$

hvor

$$E_t = 2M_t - D_t$$
$$T_t = 2(M_t - D_t)/(k-1)$$
$$M_t = (Y_t + Y_{t+1} + \ldots + Y_{t-k+1})/k$$
$$D_t = (M_t + M_{t+1} + \ldots + M_{t-k+1})/k$$

E_t = forventet basisnivå i periode t

T_t = forventet trend i periode t

Marit Helene Gladhaug, NHH

$$\text{Skyggepris} = \frac{\text{Økning (reduksjon) i målfunksjon}}{\text{Antall enheter økt ressurstilgang}}$$

1. Hvorfor er det alltid slik at EVPI = min EOL

Beklagelse er det tapet man opplever, gitt at en bestemt tilstand har inntruffet, ved at man har valgt noe annet enn det som ville vært riktig i etterpåklokskapens lys. Dersom man hadde hatt perfekt informasjon (noe som selsagt ikke er realistisk) ville man unngått et slik tap. Derfor er EVPI = min EOL.

2. Tillat økning / reduksjon i sensitivitetsrapporten

Tillat økning / reduksjon for beslutningsproblemene i et LP-problem sier deg hvor mye målfunksjonskoeffisienten (for eksempel DB per stykk) kan økes / reduseres uten at den optimale løsningen endres. En endring i målfunksjons-koeffisienten utover dette kan medføre at den optimale løsningen flytter seg til et annet hjørnepunkt i mulighetsområdet. Grenseverdiene må tolkes som minimums grenser, dvs at så lenge man holder seg innenfor grenseverdiene så vil den nåværende løsningen fremdeles være optimal. Det kan skje at løsningen ikke endrer seg selv om målfunksjonskoeffisientene endres mer enn de tillate verdiene.

Marit Helene Gladhaug, NHH

BED4: Viktige begrensninger

- Minst halvparten så mange X_1 som X_2:

  $X_1 \geq 0{,}5 X_2$

- Minst to ganger så mange X_2 som X_1:

  $X_2 \geq 2 X_1$

Merk: X_2 er dobbelt så stor som X_1, derfor må vi ha dobbelt så mange X_1 som X_2 for å få likhet

- Leverandør 1 krever at hver leveranse minst må være på 150 tonn

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis leveranse til prosjekt } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X_{11} - MY_1 &\leq 0, & X_{11} &\geq 150 Y_1 \\ X_{12} - MY_2 &\leq 0, & X_{12} &\geq 150 Y_2 \\ X_{13} - MY_3 &\leq 0, & X_{13} &\geq 150 Y_3 \\ X_{14} - MY_4 &\leq 0, & X_{14} &\geq 150 Y_4 \end{aligned}$$

der M er et stort tall

Marit Helene Gladhaug, NHH

- Leverandør 2 krever at kun ett prosjekt kan ha en leveranse på mer enn 200 tonn

$$Z_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis leveranse til prosjekt } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$X_{21} \leq 200 + MZ_1 \Rightarrow X_{21} - MZ_1 \leq 200$$
$$X_{22} \leq 200 + MZ_2 \Rightarrow X_{22} - MZ_2 \leq 200$$
$$X_{23} \leq 200 + MZ_3 \Rightarrow X_{23} - MZ_3 \leq 200$$
$$X_{24} \leq 200 + MZ_4 \Rightarrow X_{24} - MZ_4 \leq 200$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \leq 1 \qquad Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = 1$$

- Leverandør 3 krever at total leveranse for de fire prosjektene må summere til enten 200, 400 eller 600

$$V_i = \begin{cases} 1 & \text{hvis leveranse til prosjekt } i \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 200V_1 + 400V_2 + 600V_3$$
$$V_1 + V_2 + V_3 \leq 1$$

- Faste kostnader på kr 10 000 til leverandør 1

I målfunksjonen: [min kostnader] .... $+ 10\,000Y_1$

$$(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) - MY_1 \leq 0$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

- Minst 25 % av det totale arbeidskraftsbehovet skal dekkes av faste ansatte

$$\underbrace{8(x_1+x_2+x_3)}_{\text{Faste ansatte}} \underbrace{\geq}_{\text{"minst"}} \underbrace{0{,}25}_{25\%} \underbrace{\left[8(x_1+x_2+x_3)+4(y_1+y_2+y_3+y_4+y_5)\right]}_{\text{Det totale arbeids-kraftsbehovet}}$$

- Minst 25 % av de som er på vakt til enhver tid skal være fast ansatt

Skift 1: $\underbrace{x_1}_{\text{fast ansatt}} \geq 0{,}25\,(\underbrace{x_1+y_1}_{\text{på vakt}})$

Skift 2: $x_1+x_2 \geq 0{,}25\,(x_1+x_2+y_1+y_2)$

Skift 3: $x_1+x_2+x_3 \geq 0{,}25\,(x_1+x_2+x_3+y_2+y_3)$

Skift 4: $x_1+x_2+x_3 \geq 0{,}25\,(x_1+x_2+x_3+y_3+y_4)$

Skift 5: $x_2+x_3 \geq 0{,}25\,(x_2+x_3+y_4+y_5)$

Skift 6: $x_3 \geq 0{,}25\,(x_3+y_5)$

Marit Helene Gladhaug, NHH

Logiske begrensninger

- Av prosjekt 1, 3 og 6 kan vi ikke velge **mer** enn ett :

$$X_1 + X_3 + X_6 \leq 1$$

- Prosjekt 4 kan ikke velges med mindre prosjekt 5 også er valgt :

$$X_4 \leq X_5$$

- Prosjekt 1 forutsetter at prosjekt 2 gjennomføres :
$$X_1 \leq X_2$$

- Prosjekt 1 forutsetter at prosjekt 2 gjennomføres og vice versa : $X_1 = X_2$

- Prosjekt 1 og 2 er gjensidig utelukkende prosjekter :
$$X_1 + X_2 \leq 1$$

- Maksimalt k av n prosjekter kan gjennomføres :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k$$

- Akkurat k av n prosjekter kan gjennomføres :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = k$$

Marit Helene Gladhaug, NHH

- Av prosjektene 1, 2, 4, 6 kan vi velge nøyaktig to prosjekter:

$$X_1 + X_2 + X_4 + X_6 = 2$$

- Prosjekt 2 kan kun velges dersom prosjekt 3 også velges, og vice versa:

$$X_2 = X_3$$

- Prosjekt 5 forutsetter at både prosjekt 3 og prosjekt 4 velges:

$$2X_5 \leq X_3 + X_4 \qquad \left[\begin{array}{l} X_5 \leq X_3 \\ X_5 \leq X_4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \quad 2X_5 - X_3 - X_4 \leq 0$$

- Hvis prosjekt 2 og 4 velges, da må også prosjekt 5 velges:

$$X_2 + X_4 - X_5 \leq 1$$

Hvis prosjekt 2 og 4 velges, ($X_2 = 1$, $X_4 = 1$) så må prosjekt 5 velges, altså må $X_5 = 1$ for at vi skal få uttrykket lik 1 (eller får vi at uttrykket er større enn 1).

- Hver aksje må inngå i porteføljen med en andel på minst 5 %:

$p_1 \geq 0$ Aksje 1

$p_2 \geq 0$ Aksje 2

$p_3 \geq 0$ Aksje 3

Marit Helene Gladhaug, NHH

• Enhver aksje må enten inngå i porteføljen med en andel på minst 5 %, eller så må andelen være lik 0.

Aksje i $i = 1, 2, 3$

$$p_i - M_i Y_i \leq 0$$
$$p_i \geq 0{,}05\, Y_i$$

Kobling mellom p_i og Y_i
Når $p_i > 0$ blir p_i tvunget til å være minst 0,05

Merk: Hvis $p_i = 0$ tvinges Y_i til å bli lik 0, dersom likheten skal holde. Analytic Solver velger den minste verdien. Hvis $p_i > 0$ tvinges Y_i til å bli positiv dersom likheten skal holde. M_i er nemlig maksimumverdien til p_i, sånn at selv om p_i har den høyeste mulige verdien, vil fremdeles likningen $p_i - M_i Y_i \leq 0$ være tilfredsstilt (ettersom at M_i er den øvre grensen til p_i).

• Kun én av lagerutvidelsene (prosjekt 1 og 2) kan gjennomføres

$$X_1 + X_2 \leq 1$$

Hvis prosjekt 1 velges får X_1 verdi 1, og da må $X_2 = 0$ for at ligningen skal være gyldig. Når $X_2 = 0$ => prosjekt 2 velges ikke. Samme gjelder dersom prosjekt 2 velges. Når $X_2 = 1$ må $X_1 = 0$ ifølge ligningen.

Marit Helene Gladhaug, NHH

- Dersom prosjekt 3 velges, så vil man også gjennomføre prosjekt 4.

$$X_3 \leq X_4 \Rightarrow X_3 - X_4 \leq 0$$

Hvis prosjekt 3 velges får vi $X_3 = 1$. Da tvinges prosjekt 4 også til å velges fordi vi må ha at høyresiden i ulikheten skal summere seg til mindre eller lik null. Hvis prosjekt 4 ikke velges når $X_3 = 1$ får vi: $X_3 - X_4 \leq 0$

$1 - 0 \leq 0 \Rightarrow$ Ugyldig!

Så når $X_3 = 1$ gjør denne ulikheten at X_4 også blir $= 1$.

- Dersom ikke prosjekt 5 gjennomføres, må prosjekt 6 gjennomføres.

Her vil vi legge inn en begrensning som gjør at når $X_5 = 0$, så må $X_6 = 1$.

$$X_5 + X_6 \geq 1$$

Når $X_5 = 0$, må $X_6 = 1$ for at ulikheten skal være gyldig.

Når $X_5 = 1$ og $X_6 = 1$ får vi $1 + 1 \geq 1$, noe som er matematisk riktig.

Marit Helene Gladhaug, NHH

Når $X_5 = 1$ og $X_6 = 0$ får vi $1 + 0 \geq 1$, noe som også er matematisk korrekt.

Den eneste kombinasjonen som ikke er lov her er at X_5 og X_6 er begge lik null. Da får vi nemlig $0 + 0 \geq 1$, noe som ikke går.