

Forkurs i matematikk

Oppgaver til dag 5

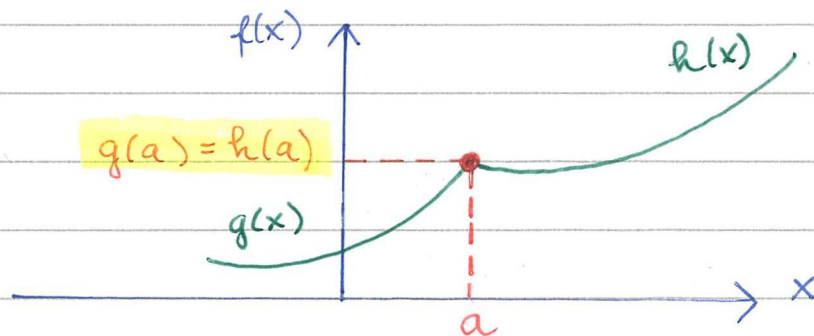
Oppgave 24 : Funksjoner med delt forskrift

Generelt: Vi har en funksjon

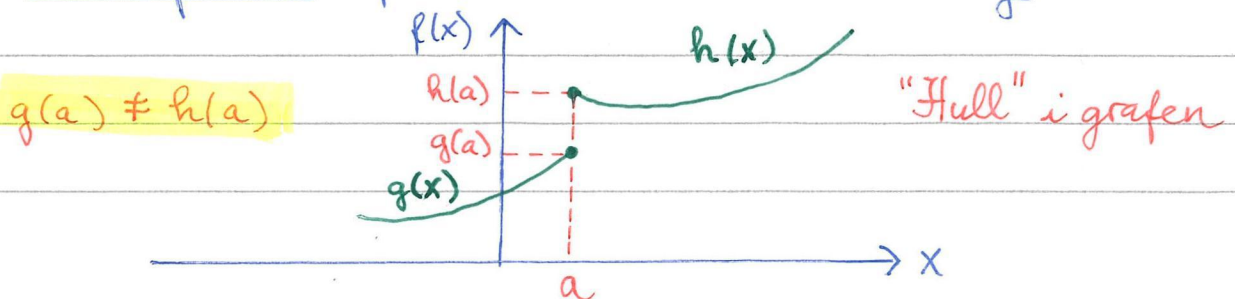
$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{hvis } x \leq a \\ h(x) & \text{hvis } x > a \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \text{eller} \\ x > a \\ x \leq a \end{array} \right]$$

der $g(x)$ og $h(x)$ gjelder på hvert sitt intervall. $f(x)$ er kontinuert i punktet a dersom $g(a) = h(a)$.

Eksempel 1 : $f(x)$ er kontinuert



Eksempel 2 : $f(x)$ er ikke kontinuert



$$f(x) = \begin{cases} g(x) = ax - 1 & \text{hvis } x \leq 1 \\ h(x) = 3x^2 + 1 & \text{hvis } x > 1 \end{cases}$$

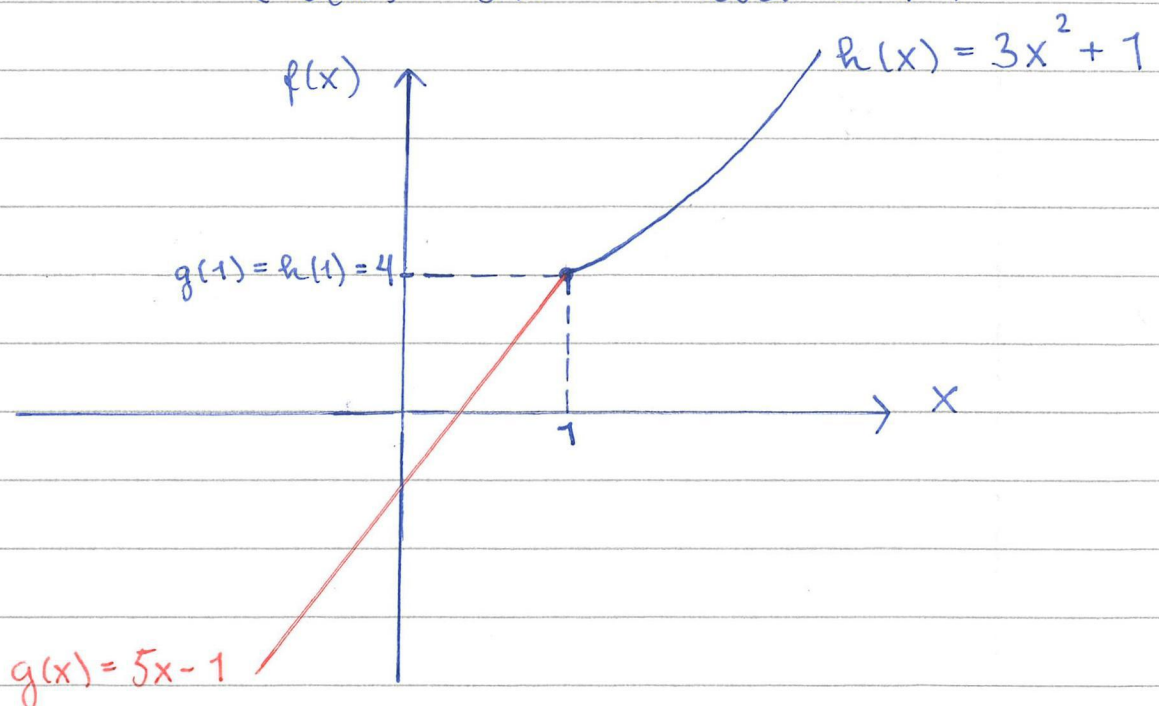
$f(x)$ er kontinuert i punktet $x = 1$ dersom $g(1) = h(1)$.

$$g(1) = a \cdot 1 - 1 = a - 1$$
$$h(1) = 3 \cdot (1)^2 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$\Rightarrow g(1) = h(1) \Rightarrow (a - 1) = 4 \Rightarrow \underline{a = 5}$$

Vi setter nå $a = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} g(x) = 5x - 1 & \text{hvis } x \leq 1 \\ h(x) = 3x^2 + 1 & \text{hvis } x > 1 \end{cases}$$



Så må vi finne ut om funksjonen er deriverbar overalt når $a = 5$.

Finner $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} g'(x) = 5 & \text{hvis } x \leq 1 \text{ [fra venstre]} \\ h'(x) = 6x & \text{hvis } x \geq 1 \text{ [fra høyre]} \end{cases}$$

Når x nærmer seg 1 fra **venstre** så vil $f'(x) = g'(x) \Rightarrow g'(1) = 5$.

Når x nærmer seg 1 fra **høyre** så vil $f'(x) = h'(x) \Rightarrow h'(1) = 6 \cdot 1 = 6$.

Viser dermed at $g'(1) \neq h'(1)$, altså er ikke $f(x)$ deriverbar for $x = 1$.

Oppsummering :

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \\ h(x) \end{cases}$$

En funksjon er **kontinuerlig** i punktet a dersom $g(a) = h(a)$.

En funksjon er **deriverbar** i punktet a dersom $g'(a) = h'(a)$.

Oppgave 25

25a) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

Kjernerregelen: Hvis $f(x) = g(h(x))$ så blir

$$f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+1} = 1 \cdot (2x+1)^{-1}$$

Husk: $\frac{1}{a} = a^{-1}$

Setter $h(x) = 2x+1$

$h'(x) = 2$

$$f'(x) = \underbrace{-1 \cdot 1 \cdot (2x+1)^{-1-1}}_{g'(h(x))} \cdot \underbrace{2}_{h'(x)}$$

$$\underline{f'(x) = -2(2x+1)^{-2} = \frac{-2}{(2x+1)^2}}$$

25b) $f(x) = \frac{x}{1-x}$

Kvotientregelen: Hvis $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ så blir

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - v'(x) \cdot u(x)}{[v(x)]^2}$$

Setter

$$u(x) = x$$

$$v(x) = 1 - x$$

$$u'(x) = 1$$

$$v'(x) = -1$$

$$f'(x) = \frac{(1-x) \cdot 1 - (-1 \cdot x)}{(1-x)^2} = \frac{1 - \cancel{x} + \cancel{x}}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}$$

Oppgave 2b

$$f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 4}{2x - 1}$$

$$x \neq \frac{1}{2}$$

fordi vi da får
null i nevneren !

Finner $f'(x)$ ved hjelp av **kvotientregelen**.

Setter

$$u(x) = 2x^2 - 5x + 4$$

$$v(x) = 2x - 1$$

$$u'(x) = 4x - 5$$

$$v'(x) = 2$$

$$f'(x) = \frac{[(2x-1) \cdot (4x-5)] - [2(2x^2 - 5x + 4)]}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - \cancel{10x} - 4x + 5 - 4x^2 + \cancel{10x} - 8}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 4x - 3}{(2x-1)^2} = 0$$

Vi har $f'(x) = 0$ når telleren $4x^2 - 4x - 3 = 0$.

Merk: Vi ser kun på telleren fordi vi ikke kan ha null i nevneren.

Faktoriserer $4x^2 - 4x - 3$ ved hjelp av ABC:

$$a = 4 \quad b = -4 \quad c = -3$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - (4 \cdot 4 \cdot -3)}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 8}{8}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{og} \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

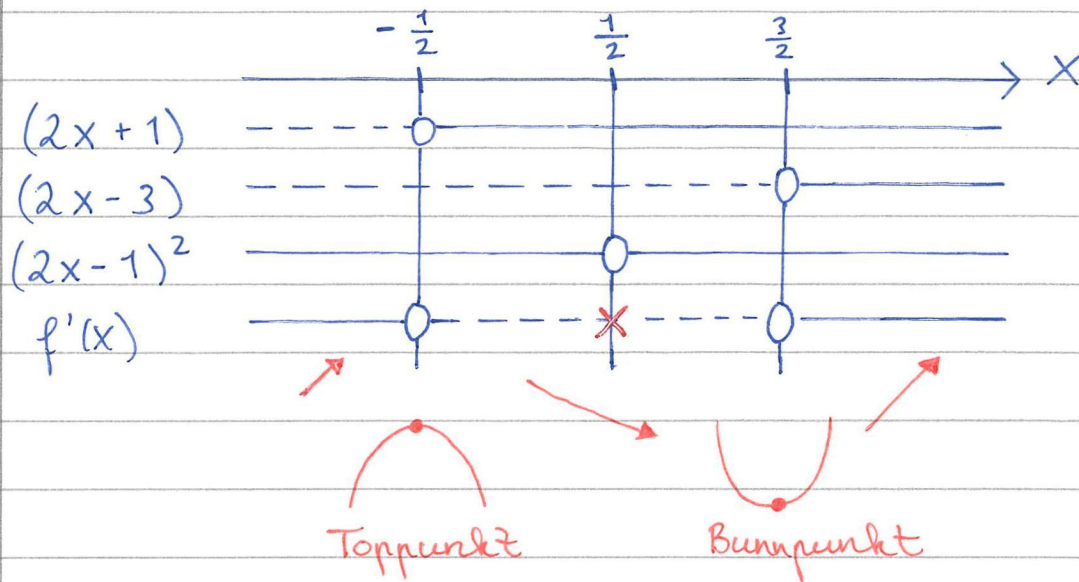
Vi får da at $4x^2 - 4x - 3 = 4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})$
Husk: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$$f'(x) = \frac{4(x + \frac{1}{2})(x - \frac{3}{2})}{(2x-1)^2} \quad | \quad * \text{Tiltes: } 4 = 2 \cdot 2$$

$$= \frac{2(x + \frac{1}{2}) \cdot 2(x - \frac{3}{2})}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x+1)(2x-3)}{(2x-1)^2}$$

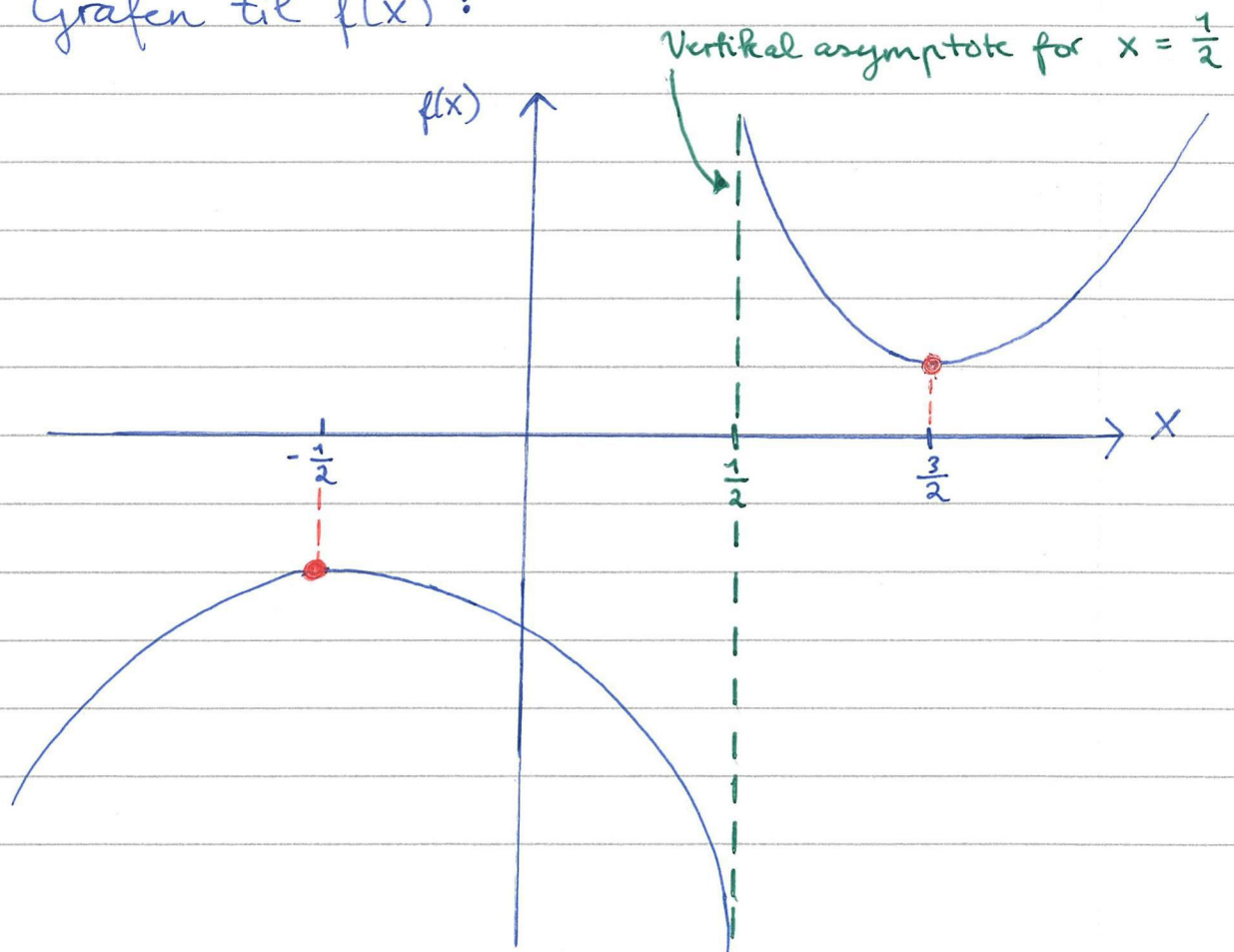
Fortegnsdiagram:



Toppunkt for $x = -\frac{1}{2}$, $f(-\frac{1}{2}) = -3,5$

Bunnepunkt for $x = \frac{3}{2}$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$

Grafen til $f(x)$:



Hvordan tegne graf:

Steg 1: Finn nullpunktene, dvs når $f(x) = 0$. G-SOLV $\rightarrow$ ROOT

Steg 2: Finn skjæringspunkt med y-aksen, dvs når $x = 0$. G-SOLV $\rightarrow$ Δ (F6) $\rightarrow$ Y-cal $\rightarrow$ "Enter X-value X: 0".

Steg 3: Finn toppunkt / bunnpunkt

① $f'(x) = 0$

② fortegnstegn

Kalkulator: G-SOLV $\rightarrow$ MAX (Toppunkt)

G-SOLV $\rightarrow$ MIN (Bunnpunkt)

Oppgave 27

27a) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} \quad [x \neq 0]$

Generelt: "Drøft fortegnet til $f(x)$ " innebærer at vi:

Steg 1: Finne nullpunktene og faktorisere

Steg 2: Tegne fortegnstegn

Her ser vi kun på telleren fordi nevneren aldri kan bli lik null.

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

ABC-formelen: $a = 1$, $b = -2$, $c = 3$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (4 \cdot 1 \cdot 3)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Ikke Pos!

Vi får feilmeldingen "Non Real Error".
Svaret er ikke et reelt tall og $f(x)$ har ingen nullpunkter.

Ved å studere uttrykket ser vi at telleren alltid blir positiv, og det samme blir nevneren.

$f(x)$ er derfor alltid voksende. $f(x) > 0$ for alle $x \neq 0$.

27b)

Horizontal asymptote: Vi lar x gå mot $\pm \infty$. Hva skjer da med $f(x)$?

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$$

Hva skjer med $f(x)$ når $x \rightarrow \pm \infty$?

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) &= \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2} = \frac{\cancel{1}x^2}{\cancel{x}^2} - \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}^2} + \frac{3}{x^2} \\ &= 1 - \underbrace{\frac{2}{x}}_{\approx 0} + \underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\approx 0} \rightarrow \underline{\underline{1}}\end{aligned}$$

Fordi $\frac{2}{x} \rightarrow 0$ og $\frac{3}{x^2} \rightarrow 0$ når $x \rightarrow \pm \infty$.

Det følger at $f(x) = 1$ er en horisontal asymptot.

Vertikal asymptote: Vi lar $f(x)$ gå mot $\pm \infty$. Hva skjer da med x ?

$$\begin{aligned}\lim \\ f(x) \rightarrow \pm \infty\end{aligned}$$

Hva skjer med x når $f(x) \rightarrow \pm \infty$?

Merk: Vertikal asymptote er de x -verdiene som gir null i nevneren.

Hvis $x = 0$ får vi null i nevneren, og dette blir en vertikal asymptote.

27c)

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2}$$

Kvotientregelen:

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$u(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$v(x) = x^2$$

$$u'(x) = 2x - 2$$

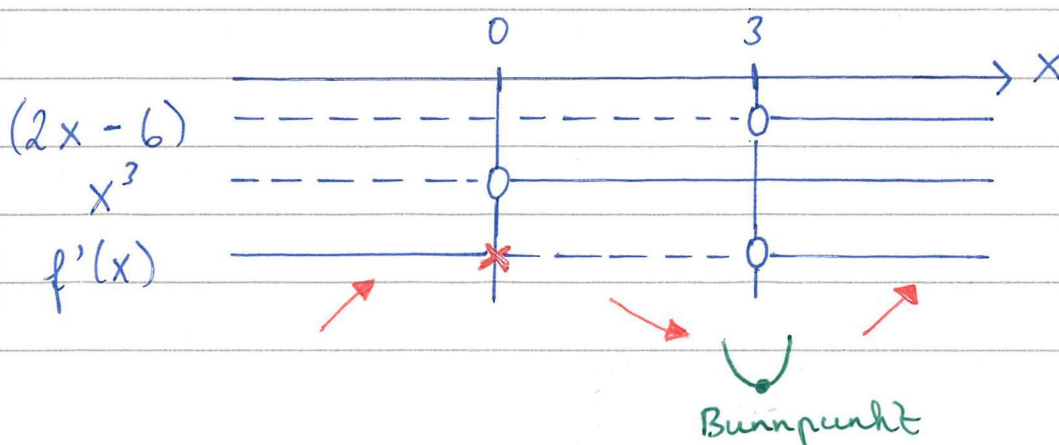
$$v'(x) = 2x$$

$$f'(x) = \frac{x^{\cancel{2}} \cdot (2x - 2) - [2\cancel{x}(x^2 - 2x + 3)]}{x^{43}}$$

$$= \frac{\cancel{2}x^2 - 2x - \cancel{2}x^2 + 4x - 6}{x^3}$$

$$= \frac{2x - 6}{x^3} = 0$$

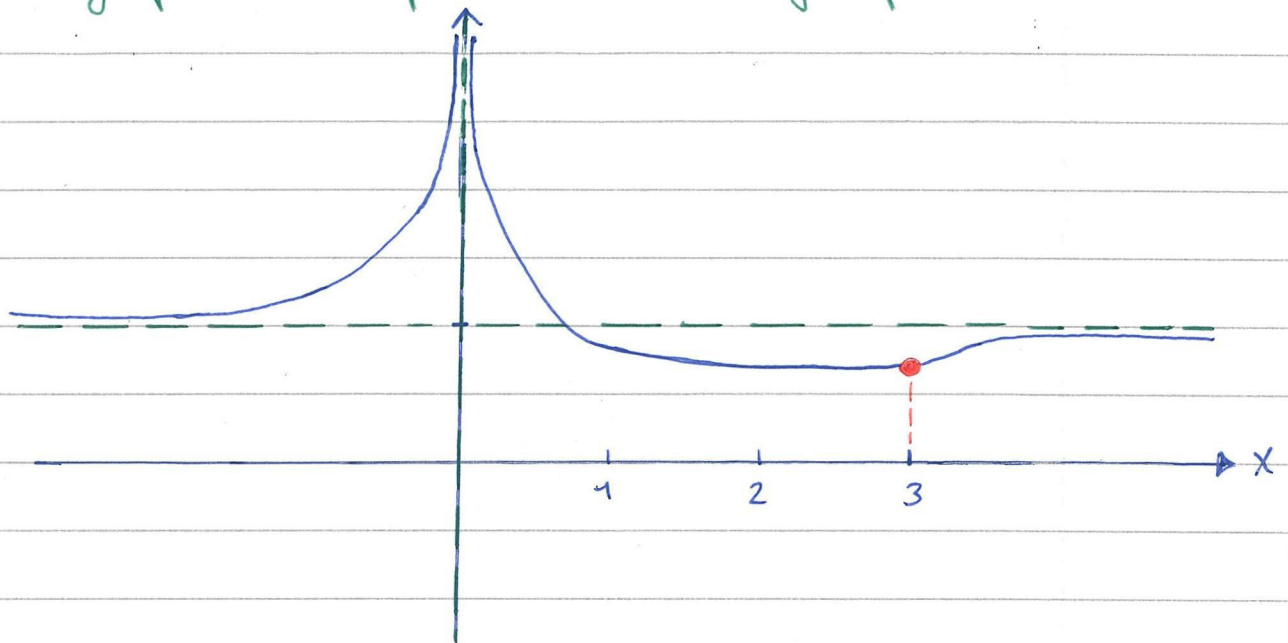
Fortegnsdiagram:



$x=3$ er et minimumspunkt for $f(x)$. $f(x)$ har ingen maksimumspunkter.

27 d) Tegner grafen $f(x) = \frac{(x^2 - 2x + 3)}{x^2}$

Asymptoter for $x=0$ og $f(x)=1$.



Oppgave 28

$K(x)$ er kostnaden ved å produsere x enheter.
 $\Rightarrow K(x)$ er **total kostnaden**.

Enhetskostnaden er gitt ved $E(x) = \frac{K(x)}{x}$

Vis at $E'(x) = \frac{K'(x) - E(x)}{x}$

Vi bruker kvotientregelen:

$$f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$$

Setter

$$u(x) = K(x)$$

$$v(x) = x$$

$$u'(x) = K'(x)$$

$$v'(x) = 1$$

$$E'(x) = \frac{x \cdot K'(x) - (K(x) \cdot 1)}{x^2} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{x} \\ \cdot \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Tips: Sammenlign det vi har over med det vi skal bevise, nemlig

$$E'(x) = \frac{K'(x) - E(x)}{x}$$

Tenk: "hva skal til for at de to uttrykkene skal bli like?"

Vi får nå:

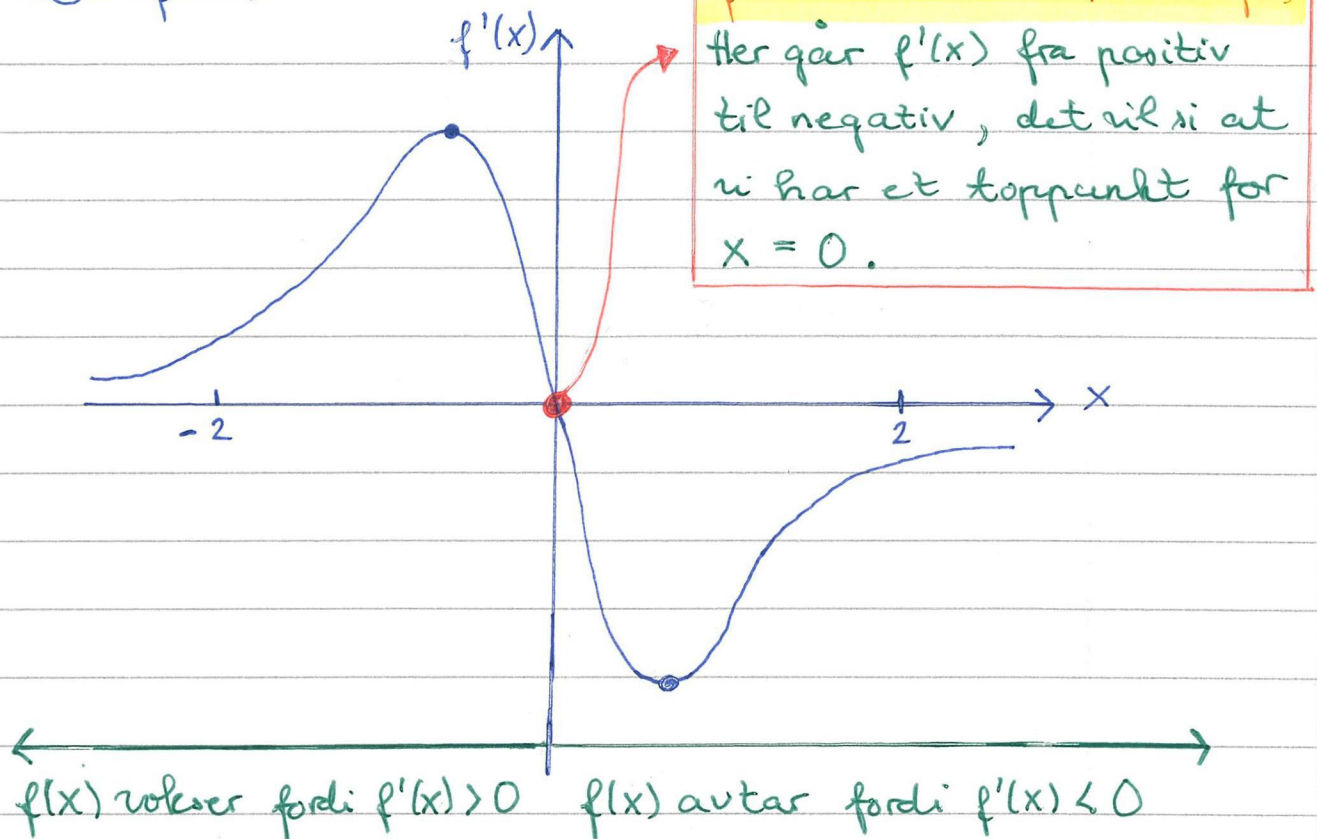
$$E'(x) = \frac{\cancel{x} \cdot K'(x)}{\cancel{x}} - \frac{K(x)}{\cancel{x}}$$

Per definisjon $E(x)$

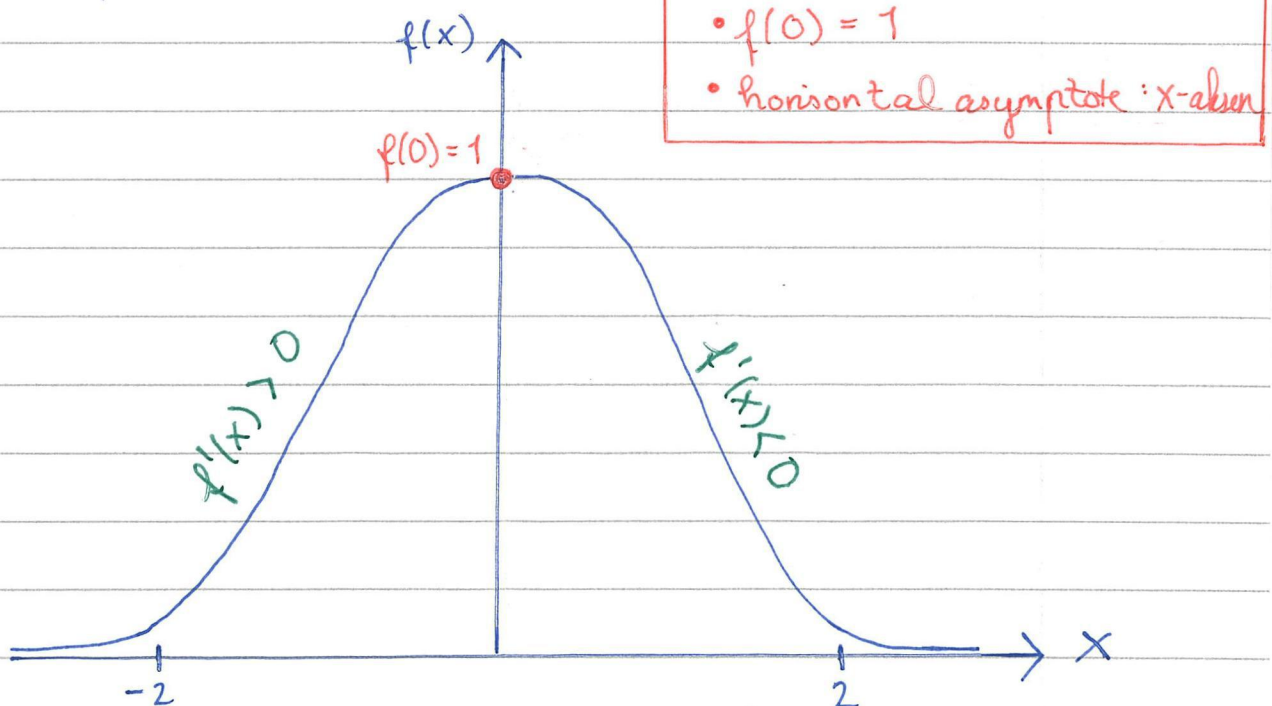
$$\Rightarrow E'(x) = \frac{K'(x) - E(x)}{x}$$

Oppgave 29

① $f'(x)$



② $f(x)$



Oppgave 30

x = pris

$f(x)$ = gjennomsnittlig antall solgte billetter
når prisen er x

$$f(x) = ax + b$$

Lineær funksjon

Fra oppgaveteksten har vi følgende opplysninger:

$$x = 80 \quad f(80) = a \cdot 80 + b = 50$$

$$x = 60 \quad f(60) = a \cdot 60 + b = 70$$

Steg 1: Ligningssett med to ukjente

$$\textcircled{1} \quad 80a + b = 50$$

$$\textcircled{2} \quad 60a + b = 70$$

Steg 2: Eliminerer b

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} : \quad 80a + \cancel{b} = 50$$

$$\quad - (60a + \cancel{b} = 70)$$

$$= 20a \quad = -20$$

$$\Rightarrow a = \frac{-20}{20} = \underline{\underline{-1}}$$

Steg 3: Løser for b

$$\textcircled{1} \quad 80 \cdot (-1) + b = 50$$

$$\Rightarrow b = 50 + 80$$

$$\Rightarrow \underline{b = 130}$$

Konklusjon: $f(x) = -x + 130 = 130 - x$

$f(x)$ gir antall solgte billetter gitt en pris x .

Vi vil vite prisen som maksimerer inntektene.

Setter $g(x) =$ inntekter ved pris x

$$\text{Inntekter} = \text{pris} \cdot \text{antall solgte billetter}$$

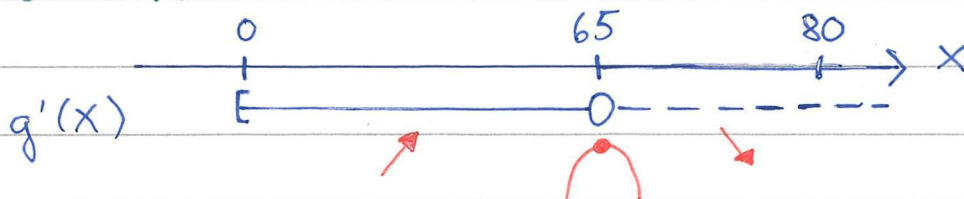
$$\Rightarrow g(x) = \underbrace{x}_{\text{pris}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\text{antall solgte billetter}}$$

$$\Rightarrow g(x) = x \cdot (130 - x) = 130x - x^2$$

Vi maksimerer $g(x)$: $g'(x) = 0$

$$g'(x) = 130 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 130 \Rightarrow \underline{x = 65}$$

Husk: Vi må bevise at $x = 65$ er et maksimumspunkt!



Inntektene er maksimert når billettprisen er 65 kr.

$$\text{Max inntekter: } g(65) = 130 \cdot (65) - 65^2 = 4225 \text{ kr.}$$

Generelt om nullpunkter / faktorisering:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

der x_1 og x_2 er nullpunkter for $f(x)$.

$$\Rightarrow f(x_1) = 0 \quad \text{og} \quad f(x_2) = 0$$

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

der x_1, x_2 og x_3 er nullpunkter for $g(x)$.

$$\Rightarrow g(x_1) = 0, \quad g(x_2) = 0 \quad \text{og} \quad g(x_3) = 0$$

Hvis $f(x)$ er delelig med $(x - a)$ er nødvendigvis $(x - a)$ en faktor i $f(x)$ og a er et nullpunkt.

$$\Rightarrow f(a) = 0$$

Eksempel: 4 er delelig med 2.

$$\frac{4}{2} = 2$$

2 er en faktor i 4 fordi $2 \cdot 2 = 4$.