

Forkurs i matematikk

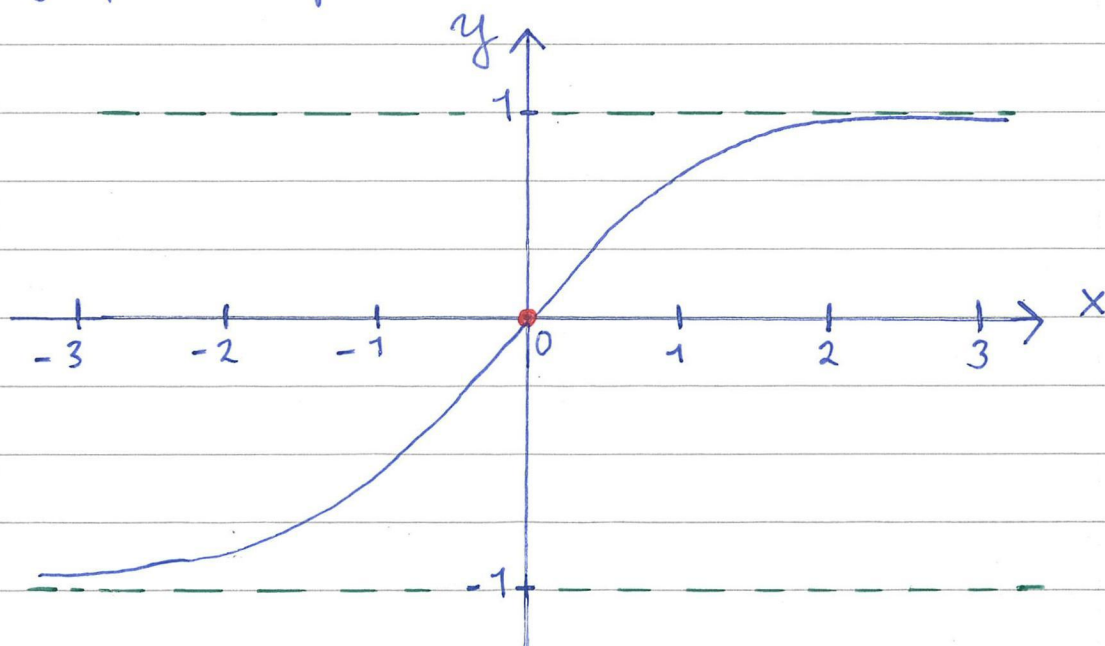
Oppgaver til dag 4

Oppgave 19

Horizontal asymptote: vi lar x gå mot pluss/minus uendelig; $\lim_{x \rightarrow \pm \infty}$

Vertikal asymptote: vi lar $f(x)$ gå mot pluss/minus uendelig; $\lim_{f(x) \rightarrow \pm \infty}$

Grafen til f er:



$f'(x)$ angir den deriverte av $f(x)$:

→ forteller hvor $f(x)$ vekser og avtar

For å kunne tegne $f'(x)$ må vi vite følgende :

Steg 1 : Vekser eller avtar $f(x)$?

Hvis $f(x)$ veksler er $f'(x) > 0$.

Hvis $f(x)$ avtar er $f'(x) < 0$.

Her veksler alltid $f(x)$ derfor er $f'(x)$ alltid positiv og må ligge over x -aksen.

Steg 2 : Bunnpunkt / toppunkt på $f(x)$?

I et bunnpunkt / toppunkt er $f'(x) = 0$.

Her har vi ingen bunn-/toppunkt. $f'(x)$ skjærer dermed aldri i punktet $x = 0$.

Steg 3 : Vendepunkt på $f(x)$?

I et vendepunkt går grafen fra å være konkav til konvekse, eller omvendt. Vi har et vendepunkt i $x = 0$.

→ Derom grafen går fra å være konkav til konvekse har vi et bunnpunkt på $f'(x)$ i vendepunktet.

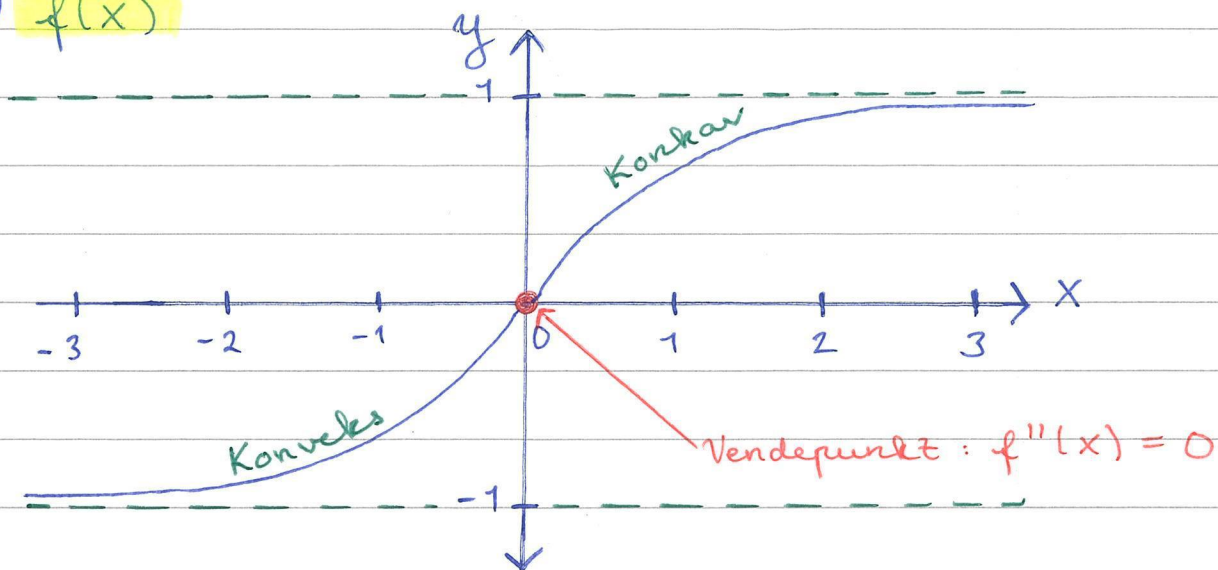
 $\Rightarrow \cup$ på $f'(x)$

→ Derom grafen går fra konvekse til konkav har vi et toppunkt på $f'(x)$ i vendepunktet.

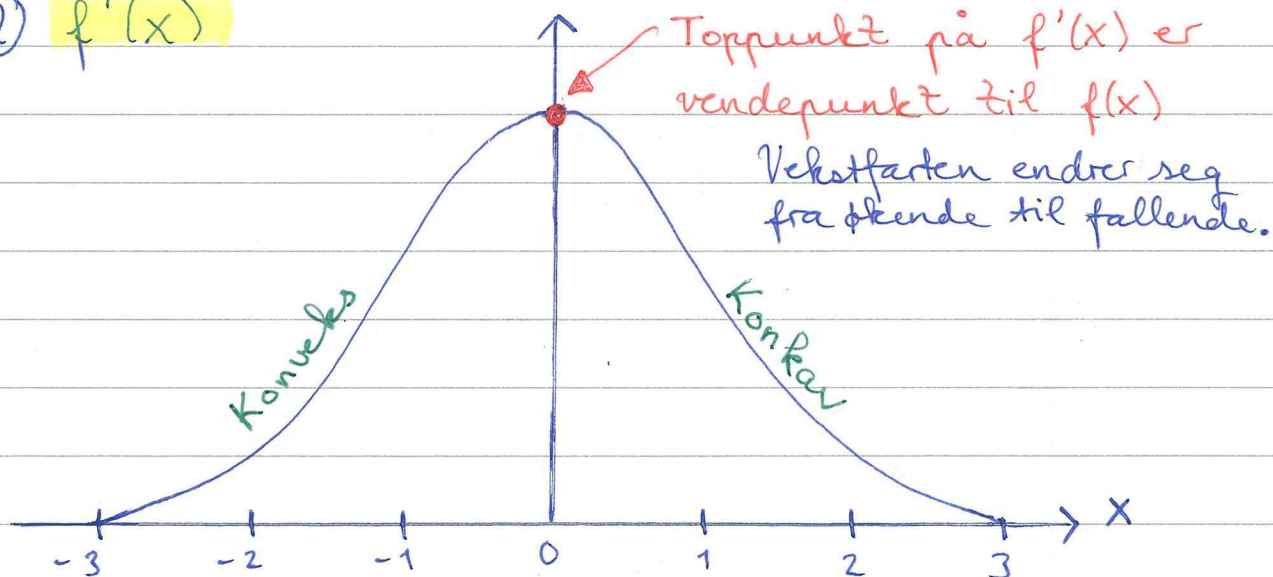
 $\Rightarrow \cap$ på $f'(x)$

Her : Vi har et toppunkt for $x = 0$ siden $f(x)$ går fra å være konvekse til konkav.

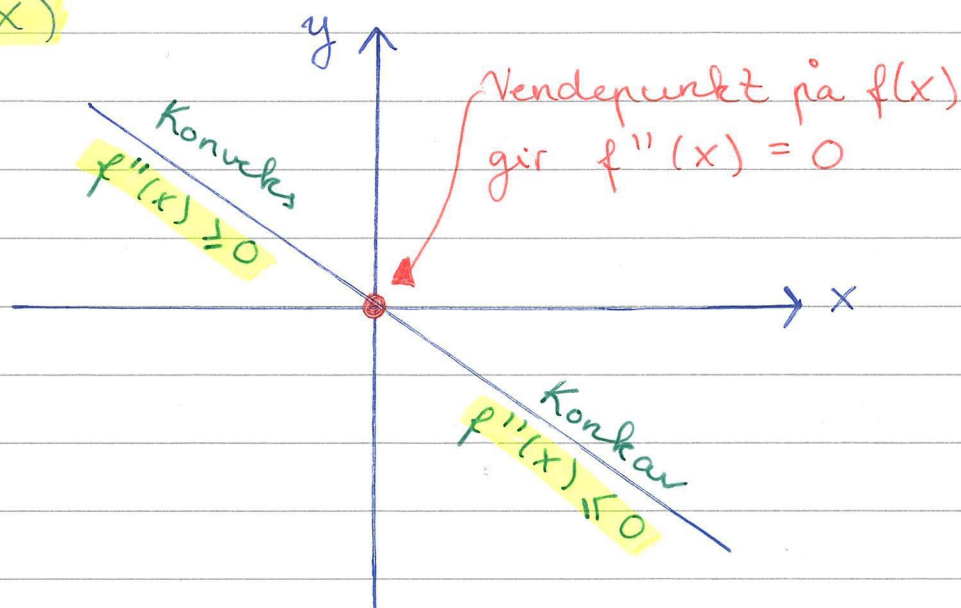
① $f(x)$



② $f'(x)$



③ $f''(x)$



Generelt:

① $f'(x)$: utviklingen av grafen

$f'(x) \geq 0 \rightarrow$ grafen vokser

$f'(x) \leq 0 \rightarrow$ grafen avtar

$f'(x) = 0 \rightarrow$ grafen verken vokser eller avtar og vi har et topp-/bunnpunkt.

② $f''(x)$: utviklingen av vekstfarten

$f''(x) \geq 0 \rightarrow$ grafen er konveks og vekstfarten er økende

$f''(x) \leq 0 \rightarrow$ grafen er konkav og vekstfarten er avtakende

$f''(x) = 0 \rightarrow$ vendepunkt; grafen går fra konkav til konveks, eller fra konveks til konkav.

③ Sammenhengen mellom $f(x)$, $f'(x)$ og $f''(x)$

• Topppunkt/bunnpunkt på $f(x) \rightarrow f'(x) = 0$

• Topppunkt/bunnpunkt på $f'(x) \rightarrow f''(x) = 0$ (vendepunkt)

• $f(x) \geq 0 \rightarrow$ Grafen ligger over x-aksen

• $f'(x) \geq 0 \rightarrow f(x)$ vokser

• $f'(x) \leq 0 \rightarrow f(x)$ avtar

Merk :

$$f(x) = 0 \Rightarrow \text{Nullpunkt}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \text{Topp-/bunnpunkt}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \text{Vendepunkt}$$

Oppgave 20

20a) $f(x) = 4x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 3$

$$f'(x) = 4 \cdot 4 x^{4-1} - \cancel{2} \cdot \cancel{\frac{3}{2}} x^{2-1} + 0$$

$$\underline{f'(x) = 16x^3 - 3x}$$

Merk :

$$f'(c) = 0$$

$c = \text{konstant}$

20b) $g(x) = 2x^2 - \frac{5}{x}$

$$\text{Husk : } \frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - 5 \cdot x^{-1}$$

$$g'(x) = 2 \cdot 2 x^{2-1} - (-1) \cdot 5 x^{-1-1}$$

$$\underline{g'(x) = 4x + 5x^{-2}}$$

$$\underline{g'(x) = 4x + \frac{5}{x^2}}$$

} Like gode svar

20c) $h(x) = 3x^2(x^2 + 8)$

Produktregelen: $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
 $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

Setter

$$\begin{array}{ll} u(x) = 3x^2 & \swarrow \searrow \\ u'(x) = 6x & \swarrow \searrow \\ v(x) = x^2 + 8 & \swarrow \searrow \\ v'(x) = 2x & \swarrow \searrow \end{array}$$

$$h'(x) = 6x \cdot (x^2 + 8) + 2x \cdot 3x^2$$

$$h'(x) = 6x^3 + 48x + 6x^3 = \underline{\underline{12x^3 + 48x}}$$

Merk: Her kan vi eventuelt bare gange ut parentesen med en gang.

20d) $k(x) = (x^2 - 2x)(1 + x^2)$

Metode 1: Produktregelen

$$\begin{array}{l} f(x) = u(x) \cdot v(x) \\ f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x) \end{array}$$

Setter

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 - 2x & \swarrow \searrow \\ u'(x) = 2x - 2 & \swarrow \searrow \\ v(x) = 1 + x^2 & \swarrow \searrow \\ v'(x) = 2x & \swarrow \searrow \end{array}$$

$$\underline{\underline{k'(x) = (2x - 2)(1 + x^2) + 2x(x^2 - 2x)}}$$

Metode 2: Ganger ut parentesene

$$\begin{aligned}k(x) &= (x^2 - 2x)(1 + x^2) \\&= x^2 + x^4 - 2x - 2x^3 \\&= x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x\end{aligned}$$

$$\underline{k'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 2}$$

Oppgave 21

Kostnaden $K(x)$ ved å produsere x enheter er

$$K(x) = px^2 + qx + r$$

Vi vet at:

$$K(500) = 32500 \Rightarrow p(500)^2 + q \cdot 500 + r = 32500$$

$$K(1000) = 60000 \Rightarrow p(1000)^2 + q \cdot 1000 + r = 60000$$

$$K(2000) = 130000 \Rightarrow p(2000)^2 + q \cdot 2000 + r = 130000$$

Steg 1: Ligningssett med tre ukjente

$$\textcircled{1} \quad 250\,000 p + 500 q + r = 32\,500$$

$$\textcircled{2} \quad 1\,000\,000 p + 1\,000 q + r = 60\,000$$

$$\textcircled{3} \quad 4\,000\,000 p + 2\,000 q + r = 130\,000$$

Steg 2: Eliminerer r

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{2} - \textcircled{1} : & 1000\,000\,p + 1000\,q + \cancel{r} & = 60\,000 \\ & - (250\,000\,p + 500\,q + \cancel{r} = 32\,500) & \\ \hline & = 750\,000\,p + 500\,q & = 27\,500 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{3} - \textcircled{2} : & 4\,000\,000\,p + 2\,000\,q + \cancel{r} & = 130\,000 \\ & - (1\,000\,000\,p + 1\,000\,q + \cancel{r} = 60\,000) & \\ \hline & = 3\,000\,000\,p + 1\,000\,q & = 70\,000 \end{array}$$

Steg 3: Ligningssett med to ukjente

$$\textcircled{i} \quad 750\,000\,p + 500\,q = 27\,500$$

$$\textcircled{ii} \quad 3\,000\,000\,p + 1\,000\,q = 70\,000$$

Steg 4: Eliminerer q

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot \textcircled{i} : & 2 \cdot (750\,000\,p) + 2 \cdot (500\,q) & = 2 \cdot (27\,500) \\ & = 1\,500\,000\,p + 1\,000\,q & = 55\,000 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{ii} - 2 \cdot \textcircled{i} : & 3\,000\,000\,p + \cancel{1\,000\,q} & = 70\,000 \\ & - (1\,500\,000\,p + \cancel{1\,000\,q} = 55\,000) & \\ \hline & = 1\,500\,000\,p & = 15\,000 \end{array}$$

$$\Rightarrow p = \frac{15\,000}{1\,500\,000} = \underline{\underline{0,01}}$$

Steg 5: Løser for q og r

$$\begin{aligned} \textcircled{i} \quad & 750\,000 \cdot 0,01 + 500q = 27\,500 \\ \Rightarrow & 7500 + 500q = 27\,500 \\ \Rightarrow & 500q = 20\,000 \\ \Rightarrow & \underline{\underline{q = 40}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & 250\,000 \cdot 0,01 + 500 \cdot 40 + r = 32\,500 \\ \Rightarrow & 2500 + 20\,000 + r = 32\,500 \\ \Rightarrow & \underline{\underline{r = 10\,000}} \end{aligned}$$

Konklusjonen blir at

$$K(x) = 0,01x^2 + 40x + 10\,000$$

Profittfunksjonen er gitt ved

$$\pi(x) = \underbrace{70x}_{\text{Inntekt}} - \underbrace{K(x)}_{\text{Kostnad}}$$

$$\Rightarrow \pi(x) = 70x - [0,01x^2 + 40x + 10\,000]$$

$$= 70x - 0,01x^2 - 40x - 10\,000$$

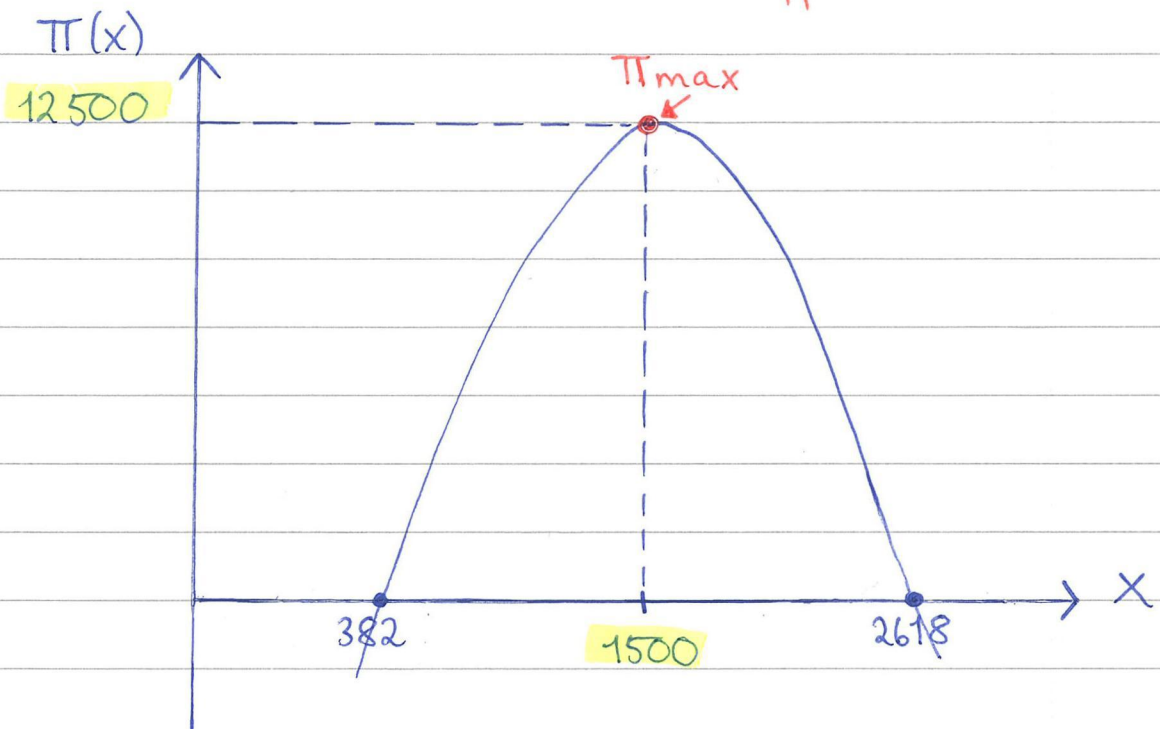
$$= -0,01x^2 + 30x - 10\,000$$

Tegner grafen på kalkulator:

Menu → GRAPH → Skriv inn $\Pi(x)$ → EXE

→ G-SOLV (F5) → Max

Finner toppunkt direkte



Vi kan også finne toppunktet ved å derivere $\Pi(x)$:

$$\Pi_{\max} = -0,01x^2 + 30x - 10000$$

$$\Pi'(x) = -0,02x + 30 = 0$$

$$0,02x = 30$$

$$\underline{\underline{x = 1500}}$$

Oppgave 22

22a) $g(x) = ax^3 - bx^2 - x + 1$

$g(x)$ og $g'(x)$ er begge delelige med $(x-1)$.

Da vet vi at $(x-1)$ er en faktor i $g(x)$ og $g'(x)$.

Videre vet vi at $x=1$ er et nullpunkt for både $g(x)$ og $g'(x)$.

$$\Rightarrow (x - \underbrace{x_1}_{\text{Nullpunkt}}) \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow g(1) = 0 \quad \text{og} \quad g'(1) = 0$$

$$\textcircled{1} \quad g(1) = a(1)^3 - b(1)^2 - 1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 0$$

$$\Rightarrow a = b$$

$$\textcircled{2} \quad g'(x) = 3 \cdot ax^2 - 2bx - 1$$

$$g'(1) = 3a(1)^2 - 2 \cdot b \cdot 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3a - 2b = 1$$

Fra ① vet vi at $a = b$. Da får vi:

$$3a - 2a = 1$$

$\downarrow$
 $a = b$

$$\Rightarrow a = 1 = b$$

Konklusjon: $a = b = 1$

22b) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 > 0$

Nullpunkt: $x = -1$

Da vet vi at $x - (-1) = x + 1$ er en faktor i $f(x)$.

Steg 1: Faktorisering

Polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x + 1 : (x + 1) = \underline{x^2 - 2x + 1} \\ \underline{-(x^3 + x^2)} \\ -2x^2 - x \\ \underline{-(-2x^2 - 2x)} \\ x + 1 \\ \underline{-(x + 1)} \\ 0 \end{array}$$

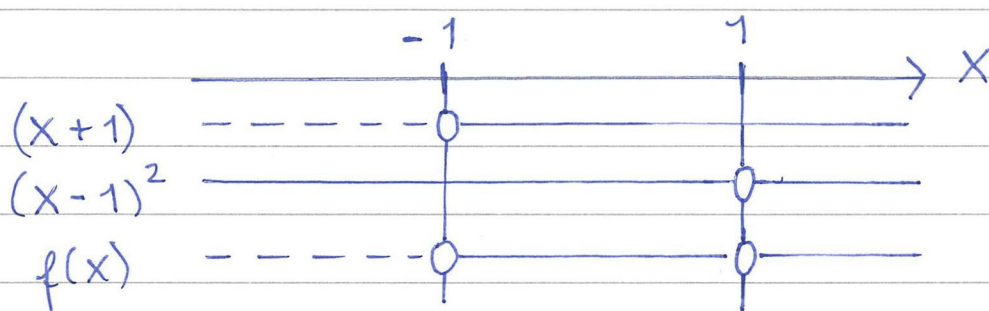
2. Kvadratformel
 $a^2 - 2ab + b^2$
 $= (a - b)^2$

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$$

Nå kan faktorisere $f(x)$:

$$f(x) = (x+1)(x-1)(x-1) = \underline{\underline{(x+1)(x-1)^2}}$$

Steg 2: Fortegnsdiagram



Ulikheten er tilfredsstilt når $x \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

22c) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Vi skal faktorisere $f'(x)$

$$\text{Setter } f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

ABC-formelen: $a = 3$ $b = -2$ $c = -1$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - (4 \cdot 3 \cdot -1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \quad \text{og} \quad x_2 = -\frac{1}{3}$$

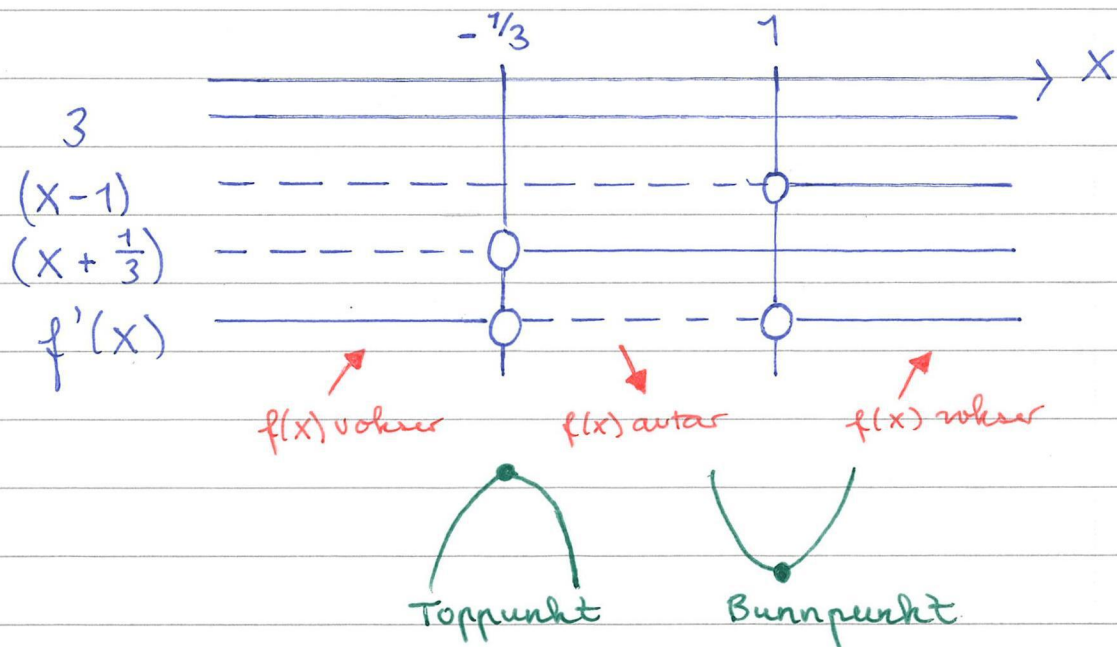
Skriver nå $f'(x)$ på faktorform:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 2x - 1 = \underline{3(x - 1)(x + \frac{1}{3})}$$

20d) Vi drøfter fortegnet til $f'(x)$:

Fortegnsdiagram:



Vi har et toppunkt for $x = -\frac{1}{3}$, NB! $f(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$

og bunnpunkt for $x = 1$, NB! $f(1) = 0$.

Merk: For å få tilhørende y -verdi, plott x -verdien inn i $f(x)$ og ikke $f'(x)$!

Koordinater :

$$\text{Toppunkt} : (-\frac{1}{3}, \frac{32}{27})$$

$$\text{Bunnpunkt} : (1, 0)$$

$f(x)$ er voksende på $(-\infty, -\frac{1}{3}]$ og på $[1, \infty)$.

$f(x)$ er avtakende på $[-\frac{1}{3}, 1]$.

22e)

Generelt: Ligningen til tangentlinje

Vi bruker ett punkts formelen :

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

der a er stigningstallet og (x_1, y_1) er et vilkårlig punkt.

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = f'(x)$$

$$\text{Punktet } (-1, 0) \Rightarrow x_1 = -1 \quad y_1 = 0$$

$$a = f'(x_1) = f'(-1)$$

Fra 22 c har vi at $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$$\begin{aligned} f'(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 \\ &= 3 + 2 - 1 = \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

Setter inn i formelen $y - y_1 = a(x - x_1)$

$$\Rightarrow y - 0 = 4(x - (-4))$$

$$\Rightarrow y = 4(x + 1)$$

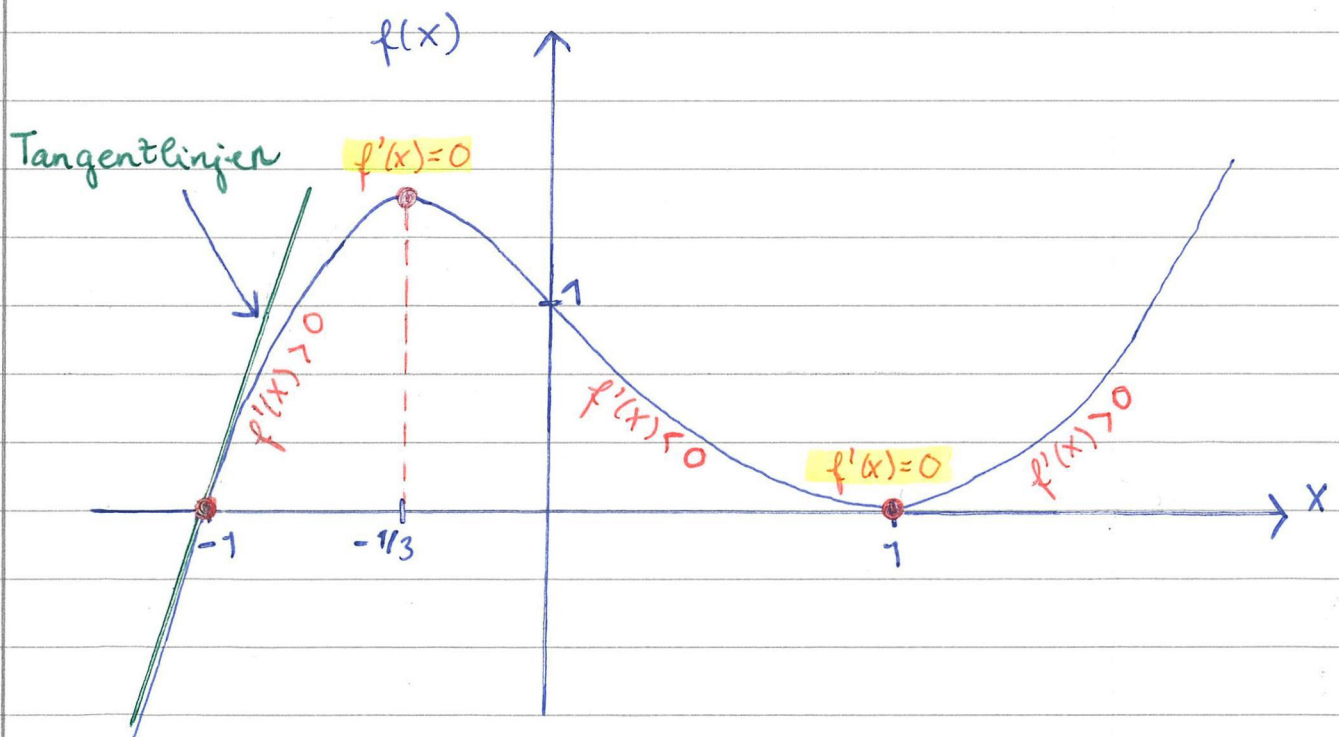
$$\Rightarrow \underline{\underline{y = 4x + 4}}$$

22f) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Tangentlinje : $y = 4x + 4$

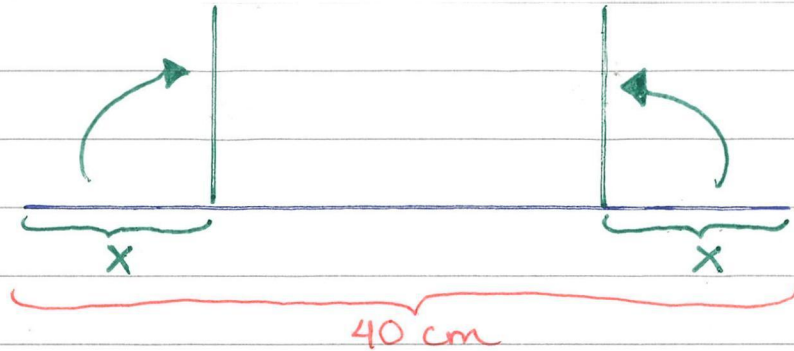


Den deriverte i punktet $x = -1$

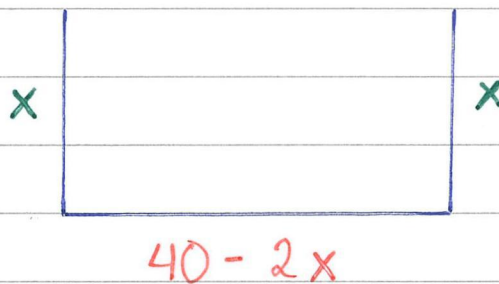


Oppgave 23

①



②



Arealet av tverrsnittet er :

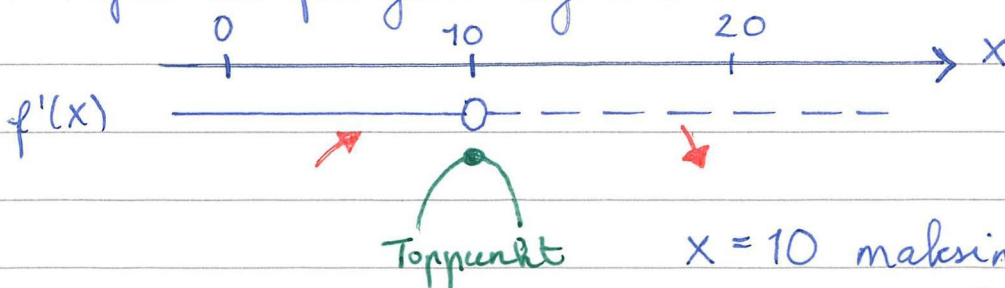
$$f(x) = x \cdot (40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

Maksimalt areal finnes vi ved $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 40 - 4x = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 10}}$$

Vi må bevise at $x = 10$ er et maksimumspunkt ved å tegne et fortegnsskild diagram :

$[x \geq 0]$



$x = 10$ maksimerer arealet.

$$\text{Max areal: } f(10) = 40 \cdot 10 - 2 \cdot 10^2 = \underline{\underline{200 \text{ cm}^2}}$$