

Forkurs i matematikk

Oppgaver til dag 3

Oppgave 12

12a) $4x^2 - 21x + 5 = 0$

Braker ABC-formelen:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

der $a = 4$, $b = -21$ og $c = 5$. Da får vi at:

$$x = \frac{-(-21) \pm \sqrt{(-21)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{361}}{8} = \frac{21 \pm 19}{8}$$

$$\underline{x = 5} \quad \text{eller} \quad \underline{x = \frac{1}{4}}$$

$$12b) \quad \frac{-4x^2 + 21x - 5}{x+2} \geq 0$$

Skriver om telleren; trekker et minustegn ut foran en parentes og får:

$$\frac{-(4x^2 - 21x + 5)}{x+2} \geq 0$$

Dette gjør jeg fordi jeg nå får uttrykket fra 12a inni parentesen. Vi vet fra 12a at $x=5$ og $x=\frac{1}{4}$ er nullpunkter for $4x^2 - 21x + 5$. Da kan vi faktorisere på følgende måte:

$$4x^2 - 21x + 5 = 4(x - \frac{1}{4})(x - 5)$$

Generelt: Vi kan faktorisere et annen-gradspolynom $ax^2 + bx + c$ slik:

$$a(x - x_1)(x - x_2)$$

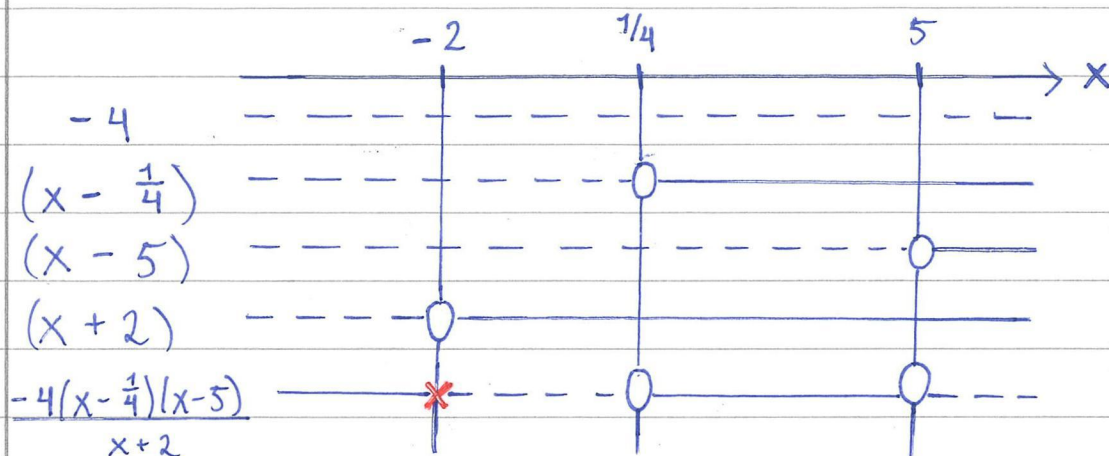
der x_1 og x_2 er nullpunktene, dvs. løsningen til ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Vi får nå ulikheten

$$\frac{-4(x - \frac{1}{4})(x - 5)}{x + 2} \geq 0$$

Setter opp et fortegnssdiagram:



Merk: Vi kan aldri ha null i nevneren.

Brøken er ikke definert for $x = -2$.

Ulikheten er tilfredsstilt når $x \in (-\infty, -2) \cup [\frac{1}{4}, 5]$. Kan også skrive at ulikheten er tilfredsstilt for $x < -2$ og for $\frac{1}{4} \leq x \leq 5$.

12c) $\frac{3}{2}x > 1 + 2(x - \frac{1}{3})$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x > 1 + 2x - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x > \frac{1}{3} + 2x$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}x - 2x > \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}x > \frac{1}{3} \quad | \cdot -2$$

$$\Rightarrow \underline{x < -\frac{2}{3}}$$

Merk: Vi må huske å snu ulikhetstegnet når vi multipliseres eller divideres med et negativt tall.

12 d) $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{2x}{x-1} > 5$

Som før finner jeg fellesnevneren [her: $(x+1)(x-1)$], og setter alt på felles brøkstrek.

$$\frac{(3x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} + \frac{2x \cdot (x+1)}{(x-1)(x+1)} - \frac{5(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} > 0$$

3. Kvadratselning

$$\Rightarrow \frac{(3x^2 - 3x - x + 1) + (2x^2 + 2x) - 5(x^2 - 1)}{(x+1)(x-1)} > 0$$

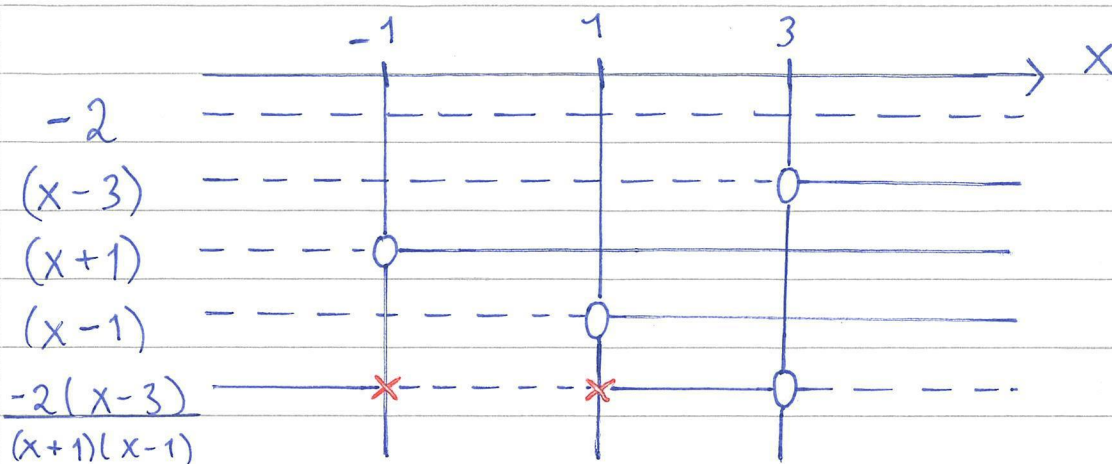
$$\Rightarrow \frac{\cancel{3x^2} - 3x - x + 1 + \cancel{2x^2} + 2x - \cancel{5x^2} + 5}{(x+1)(x-1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2x + 6}{(x+1)(x-1)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{-2(x-3)}{(x+1)(x-1)} > 0$$

Husk å snu fortegn inni parentesen!

Setter opp et fortegnssdiagram:



Ulikheten er tilfredsstilt når $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 3)$. Vi kan også skrive at ulikheten er tilfredsstilt når $x < -1$ eller $1 < x < 3$.

Oppgave 13

$$f(x) = x^3 - 3x - 2$$

Generelt: Et polynom $f(x)$ er delelig med $x-a$ når $f(a) = 0$.

For at $f(x) = x^3 - 3x - 2$ skal være delelig med $x+1$ må $f(-1) = 0$. Merk at $x - (-1) = x+1$.

Vi sjekker at $f(-1) = 0$:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = 0. \quad \text{OK!}$$

Altså må $f(x)$ være delelig med $x+1$.

Vi utfører polynomdivisjon:

$$\begin{array}{r} x^3 + 0x^2 - 3x - 2 : (x+1) = \underline{x^2 - x - 2} \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline -x^2 - 3x \\ -(-x^2 - x) \\ \hline -2x - 2 \\ -(-2x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

Nå vet vi at

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)$$

Vi finner nullpunktene til andregradspolynomet.
Bruker ABC-formelen der $a=1$, $b=-1$ og $c=-2$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - (4 \cdot 1 \cdot -2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\underline{x = 2} \quad \text{eller} \quad \underline{x = -1}$$

Vi bruker regelen på side 2 og faktorerer ved hjelp av nullpunktene.

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

Nå kan vi skrive $f(x)$ som et produkt av bare førstegradsfaktorer.

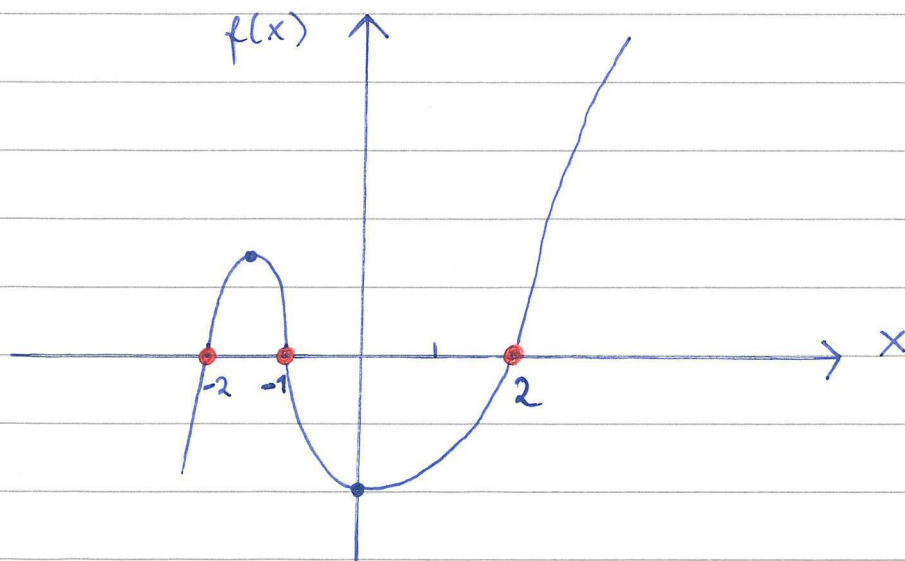
$$f(x) = \underbrace{(x+1) \cdot \overbrace{(x^2-x-2)} \cdot (x+1)}_{\text{Førstegradsfaktorer}}$$

Alternativt kan vi skrive $f(x) = (x+1)^2 \cdot (x-2)$. Det essensielle er nemlig at vi kun har x -er av første grad og ikke x^2 , x^3 etc.

Oppgave 14

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

Vi kan skissere grafen for å finne nullpunktene, altså punktene der grafen skjærer x -aksen ($y=0$).



Oppskrift: Hvordan finne nullpunkter grafisk

Først må man skrive inn funksjonsuttrykket.
Trykk på Menu $\rightarrow$ GRAPH og skriv inn.
Juster vinduet ved å trykke på F3
"V-Window". Her må man skrive inn fornuftige
minimums- og maksimumsverdier til X og Y.

Trykk på EXE for å få opp grafen. Deretter
trykk på F5 "G-Solv", og så trykk på
"ROOT". Da får man opp nullpunktene til
grafene.

Nullpunktene til $f(x)$ er:

$$x = -2$$

$$x = -1$$

$$x = 2$$

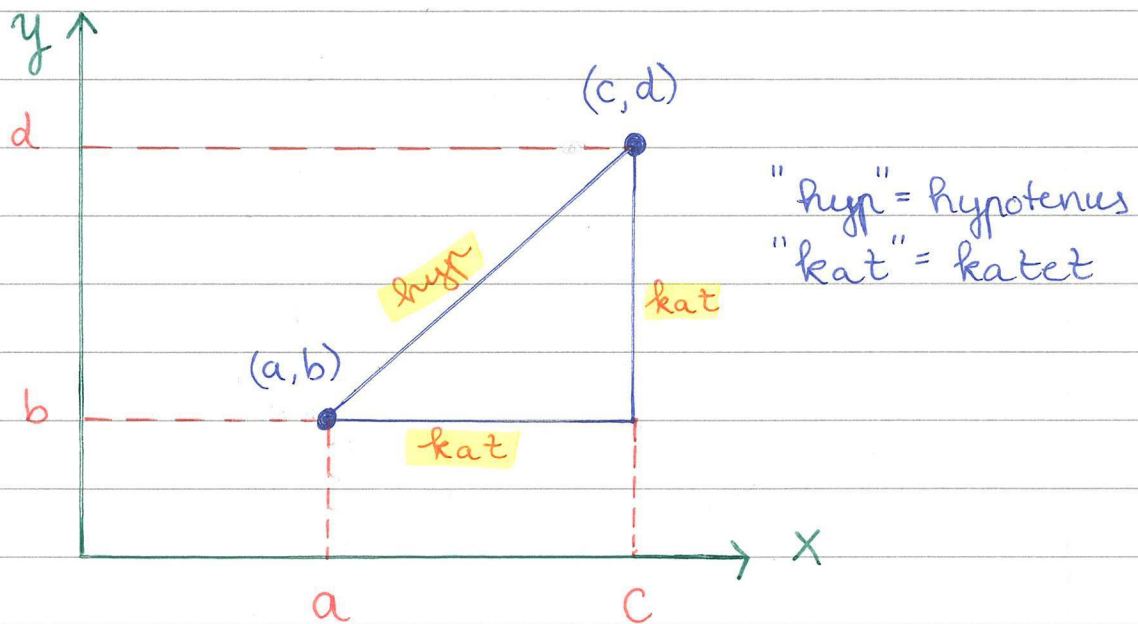
Da må $x - (-2)$, $x - (-1)$ og $x - 2$ være
faktorer i $f(x)$. Vi kan dermed faktorisere $f(x)$ slik:

$$f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+2)(x+1)(x-2)$$

Oppgave 15

Generelt: Avstanden mellom punktene (a, b) og (c, d) er gitt ved:

$$\sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2} \quad [\text{Pythagoras' formel}]$$



$$\text{hyp}^2 = \text{kat}^2 + \text{kat}^2$$

$$\text{avstand}^2 = (c-a)^2 + (d-b)^2$$

$$\text{avstand} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

15a) Vi har punktene $(1, 3)$ og $(2, 4)$
 (a, b) (c, d)

Setter $a=1$, $b=3$, $c=2$ og $d=4$.

$$\text{avstand} = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$$

15b) Vi har punktene $(-1, 2)$ og $(-3, -3)$.
 (a, b) (c, d)

Setter $a = -1$, $b = 2$, $c = -3$ og $d = -3$.

$$\begin{aligned}\text{avstand} &= \sqrt{[(-3) - (-1)]^2 + [(-3) - 2]^2} \\ &= \sqrt{4 + 25} = \underline{\underline{\sqrt{29}}}\end{aligned}$$

15c) Vi har punktene (a, b) og $(-a, b)$.
 (a, b) (c, d)

Setter $a = a$, $b = b$, $c = -a$ og $d = b$.

$$\begin{aligned}\text{avstand} &= \sqrt{(-a - a)^2 + (\cancel{b} - \cancel{b})^2} \\ &= \sqrt{(-2a)^2} = \sqrt{(-2)^2 \cdot a^2} \\ &= \sqrt{4} \cdot \cancel{\sqrt{a^2}} = \underline{\underline{2a}}\end{aligned}$$

15d) Vi har punktene (x, y) og $(2x, y+3)$.
 (a, b) (c, d)

Setter $a = x$, $b = y$, $c = 2x$ og $d = y+3$.

$$\text{avstand} = \sqrt{(2x - x)^2 + [(y+3) - \cancel{y}]^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 3^2} = \underline{\sqrt{x^2 + 9}} \neq \sqrt{x^2} + \sqrt{9}$$

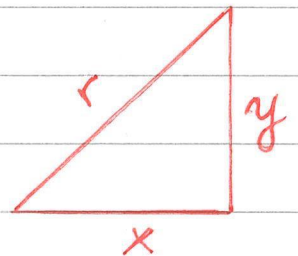
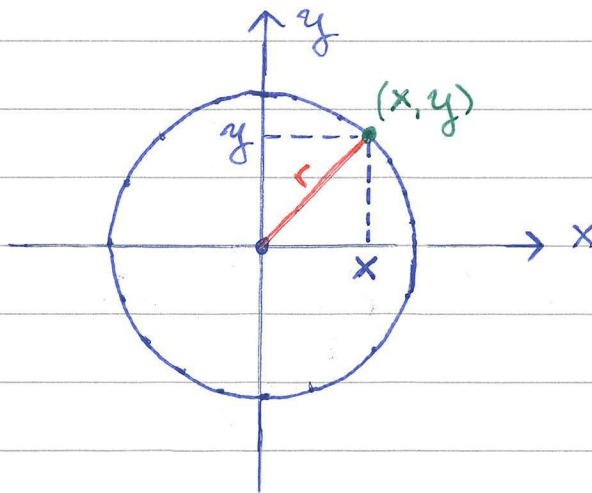
Merk: Hadde vi hatt $\sqrt{x^2 \cdot 9}$ får vi:

$$\sqrt{x^2 \cdot 9} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{9} = x \cdot 3$$

Oppgave 16

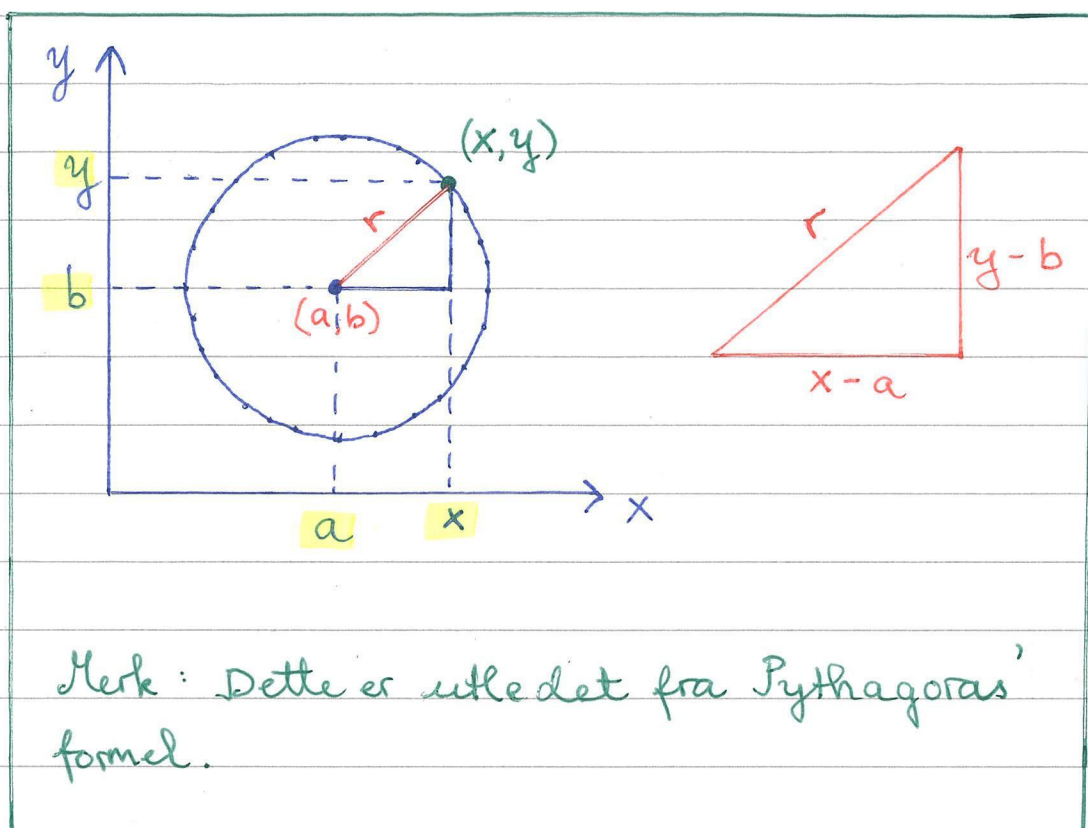
Generelt: Ligningen for en sirkel med sentrum i origo $(0,0)$, radius r og punkter (x,y) er:

$$x^2 + y^2 = r^2$$



Med sentrum i et annet punkt (a,b) blir sirkelligningen:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$



16a) Sentrum er i punktet $(2, 3)$. Da setter vi $a = 2$ og $b = 3$.

Radius er lik 4. Vi plottes inn i formelen og får:

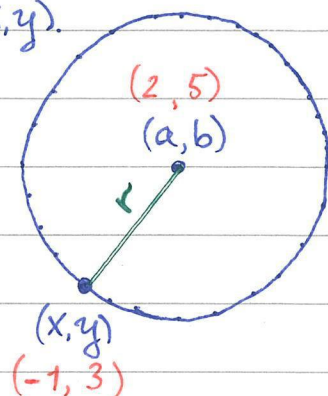
$$\text{Formel: } (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$\underline{(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2}$$

16b) Sentrum er i punktet $(2, 5)$. Setter $a = 2$ og $b = 5$.

Her har vi ikke oppgitt radius. Må først finne radius for å kunne benytte formelen over.

Radiusen er simpelthen avstanden mellom punktene (a,b) og (x,y) .



$$(x,y) = (c,d) = (-1,3)$$

$$\text{avstand} = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

$$\text{avstand} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{13} = r$$

Ligningen til sirkelen blir dermed :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 = \cancel{\sqrt{13}^2}$$

$$\underline{(x-2)^2 + (y-5)^2 = 13}$$

Oppgave 17

17a) $f(x) = \sqrt{4-2x}$

Definisjonsmengde er de verdiene x kan ha slik at grafen $f(x)$ er definert. Altså er det mengden av tall x kan gi til funksjonen.

Her er $f(x)$ definert for $4 - 2x \geq 0$, ettersom vi ikke kan ha negative tall under rottegnet.

Merk: $\sqrt{0} = 0$

OK 😊

$\sqrt{-1} = \text{"ERROR"}$ IKKE OK ☹️

Får dermed: $4 - 2x \geq 0$

$4 \geq 2x \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$x \leq 2$

17e)

$g(x) = \frac{1}{x^2}$

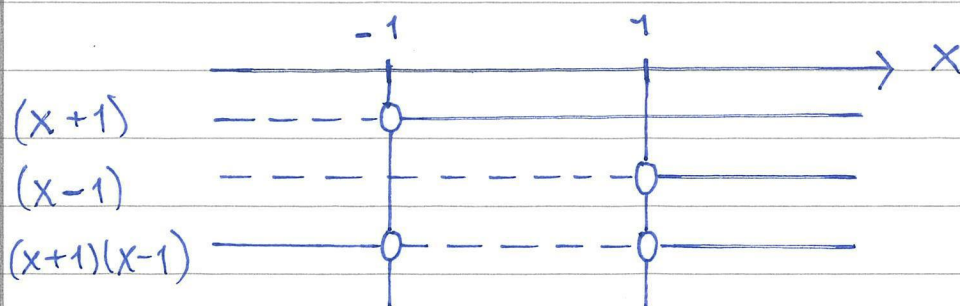
$g(x)$ er definert for alle $x \neq 0$ siden vi ikke kan ha null i nevneren.

17c)

$h(x) = [(x+1)(x-1)]^{\frac{1}{2}}$

Husk: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

$h(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$ er definert når $(x+1)(x-1) \geq 0$. Tegner opp et fortegnssdiagram:



$$(x+1)(x-1) \geq 0 \text{ når } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$

(altså når $-1 \geq x \geq 1$).

Oppgave 18

18a) $f(x) = 100x^2$

$$\begin{aligned} f(tx) &= 100(tx)^2 = 100 \cdot t^2 \cdot x^2 \\ &= t^2 \cdot \underbrace{100x^2}_{f(x)} = t^2 \cdot f(x) \end{aligned}$$

18b) $g(x) = \sqrt{2x}$

$$g(tx) = \sqrt{2 \cdot tx} = \sqrt{t} \cdot \underbrace{\sqrt{2x}}_{g(x)} = \sqrt{t} \cdot g(x)$$

Merk: $t \geq 0$ fordi vi må ha et positivt tall under rottegnet.

NB! $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ OK!

$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$ IKKE OK!

Eksempel: $a=2$ og $b=3$

$$\begin{aligned} \sqrt{a \cdot b} &= \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \\ \sqrt{a+b} &= \sqrt{2+3} = \underbrace{\sqrt{5}}_{\approx 2,24} \neq \underbrace{\sqrt{2} + \sqrt{3}}_{\approx 3,15} \end{aligned}$$