

Forkurs i matematikk

Oppgaver til dag 2

Oppgave 6

$$\frac{18b^2}{a^2 - 9b^2} - \frac{a}{a+3b} + 2$$

Steg 1: Faktorisere nevneren

Hint: 3. kvadratsetning: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$\frac{18b^2}{(a-3b)(a+3b)} - \frac{a}{a+3b} + 2$$

Steg 2: Finne fellesnevner og sette uttrykket på felles brøktrekk

$$\begin{aligned} & \frac{18b^2}{(a-3b)(a+3b)} - \frac{a(a-3b)}{(a-3b)(a+3b)} + \frac{2(a-3b)(a+3b)}{(a-3b)(a+3b)} \\ &= \frac{18b^2 - (a^2 - 3ab) + 2(a^2 - 3ab + 3ab - 9b^2)}{(a-3b)(a+3b)} \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{18b^2} - a^2 + 3ab + 2a^2 - \cancel{18b^2}}{(a-3b)(a+3b)}$$

$$= \frac{a^2 + 3ab}{(a-3b)(a+3b)} = \frac{a(\cancel{a+3b})}{(a-3b)(\cancel{a+3b})} = \frac{a}{a-3b}$$

Merk: Faktoriser mest mulig! Husk på følgende tre ting:

- (1) Faktoriserer nevner
- (2) Finne fellesnevner
- (3) Sette uttrykket på felles brøkestrek

Oppgave 7

7a) $3a - \frac{4a-2}{3} + \frac{2a-4}{6}$

Steg 1: Finne fellesnevner (som her er 6), og multiplisere over og under brøkestreken med tallet som gjør at vi får 6 i nevneren slik at vi kan sette uttrykket på en felles brøkestrek

$$\frac{3a \cdot 6}{1 \cdot 6} - \frac{(4a-2) \cdot 2}{3 \cdot 2} + \frac{2a-4}{6}$$

$$= \frac{18a}{6} - \frac{(8a-4)}{6} + \frac{2a-4}{6}$$

Steg 2 : Sette uttrykket på felles brøkstrøk

$$\frac{18a - 8a + \cancel{4} + 2a - \cancel{4}}{6} = \frac{\cancel{12}a}{6} = \underline{\underline{2a}}$$

7b)

$$2 \underbrace{(a+2)^2}_{\substack{1. \text{ kvadrat-} \\ \text{setning}}} - \underbrace{(a-2)^2}_{\substack{2. \text{ kvadrat-} \\ \text{setning}}} - \underbrace{(a+2)(a-2)}_{\substack{3. \text{ kvadrat-} \\ \text{setning} / \\ \text{Konjugatsetningen}}}$$

Merk :

1. kvadratsetning : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. kvadratsetning : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. kvadratsetning : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Følgelig får vi at :

$$2(a^2 + 4a + 4) - (a^2 - 4a + 4) - (a^2 - 4)$$

$$= \cancel{2a^2} + 8a + 8 - \cancel{a^2} + 4a - \cancel{4} - \cancel{a^2} + \cancel{4}$$

$$= \underline{\underline{12a + 8}}$$

7c)

$$\left(\frac{3}{2x+4} \right) : \left(\frac{3x-9}{2x^2-8} \right)$$

$$\text{Generelt : } \left(\frac{a}{b} \right) : \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

$$\left(\frac{3}{2x+4} \right) \cdot \left(\frac{2x^2-8}{3x-9} \right)$$

Steg 1: Faktoriserer teller og nevner, og forkorter.

$$\frac{3}{2(x+2)} \cdot \frac{2(\overbrace{x^2-4})}{3(x-3)} \quad \xrightarrow{\text{3. kvadratsetning:}} \quad (a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$$

$$= \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}(x+2)} \cdot \frac{\cancel{2}(\cancel{x+2})(x-2)}{\cancel{3}(x-3)} = \frac{x-2}{x-3}$$

Merk: Vi kan kun stryke når vi har gange-tegn. Hadde vi hatt et pluss-tegn istedenfor kunne vi ikke ha strøket noe!

Oppgave 8

$$8a) \quad \frac{3a^2b^4c^3}{12a^4bc^3} = \frac{\cancel{3}a^{\cancel{2}}b^{\cancel{4}3}c^{\cancel{3}}}{\cancel{3} \cdot 4a^{\cancel{4}2}b^{\cancel{1}}c^{\cancel{3}}} = \frac{b^3}{4a^2}$$

$$8b) \quad \frac{a^2x^2 - ax}{ax} = \frac{\cancel{a^2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{a}x} - \frac{\cancel{a}x}{\cancel{a}x} \overset{1}{=} 1$$

$$= \underline{ax - 1}$$

$$8c) \quad \frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b}$$

Steg 1: Finne fellesnevner [her: $(a+b)(a-b)$] og multipliserer oppe og nede for å sette på felles brøkestrek.

$$\frac{1(a-b)}{(a+b)(a-b)} - \frac{1(a+b)}{(a-b)(a+b)}$$

Steg 2: Felles brøkestrek

$$\frac{(a-b) - (a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{\cancel{a} - b - \cancel{a} - b}{(a+b)(a-b)}$$

$$= \frac{-2b}{(a+b)(a-b)} = \frac{-2b}{a^2 - b^2}$$

Oppgave 9

$$9a) \quad \frac{x+1}{x+2} = \frac{6}{8}$$

Generelt: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = cb$

Får da at :

$$(x+1) \cdot 8 = 6(x+2)$$

$$\Rightarrow 8x + 8 = 6x + 12 \quad [\text{Samler } x\text{-ene}]$$

$$\Rightarrow 8x - 6x = 12 - 8$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} = \frac{4}{2} \quad \Rightarrow \underline{\underline{x = 2}}$$

$$9b) \quad \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} > 0$$

Steg 1: Finne fellestnevner [her: $(1+x)(1-x)$] og multipliserer oppe og nede.

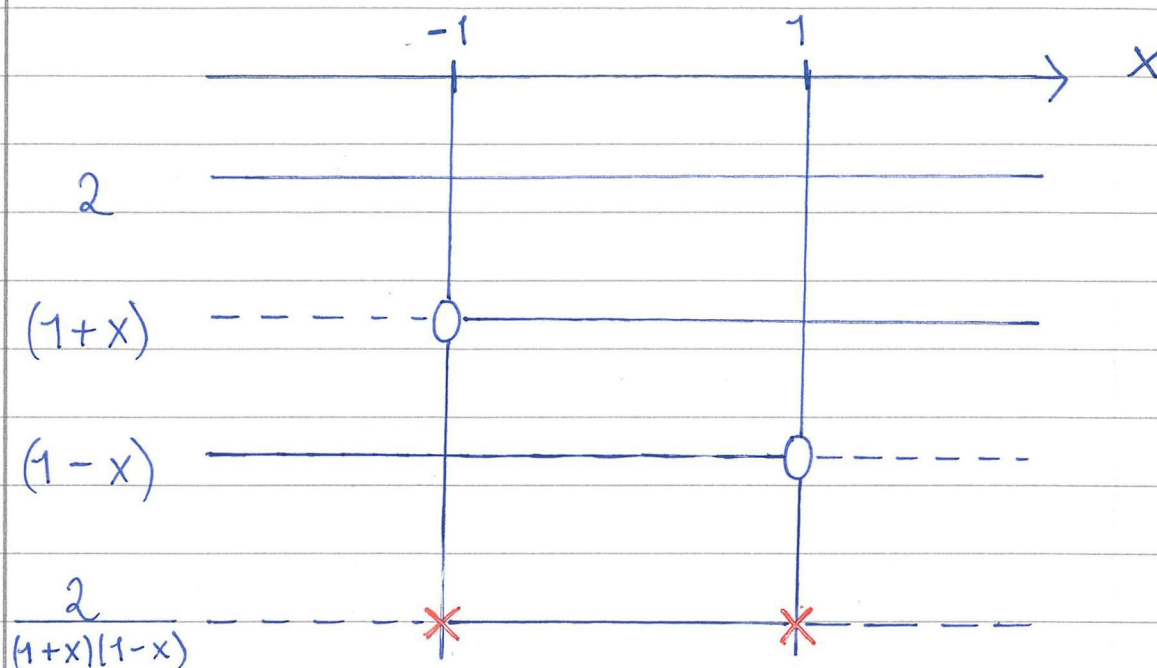
$$\frac{1 \cdot (1-x)}{(1+x)(1-x)} + \frac{1 \cdot (1+x)}{(1-x)(1+x)} > 0$$

Steg 2: Sette uttrykket på felles brøkestrek

$$\frac{1 - \cancel{x} + 1 + \cancel{x}}{(1+x)(1-x)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(1+x)(1-x)} > 0$$

Steg 3: Sette uttrykket på et fortegnssdiagram



Merk: Vi kan aldri ha null i nevneren! Uttrykket er ikke definert når $x = -1$ eller $x = 1$.

Ulikheten er tilfredsstilt når $x \in (-1, 1)$, eventuelt $x \in \langle -1, 1 \rangle$.

Merk: $() \Rightarrow$ uten endepunktene
 $\langle \rangle \Rightarrow$ uten endepunktene
 $[] \Rightarrow$ med endepunktene

9c) $(1-x)^3 - 3x(1-x)^2 > 0$

Steg 1: Faktoriserer uttrykket.

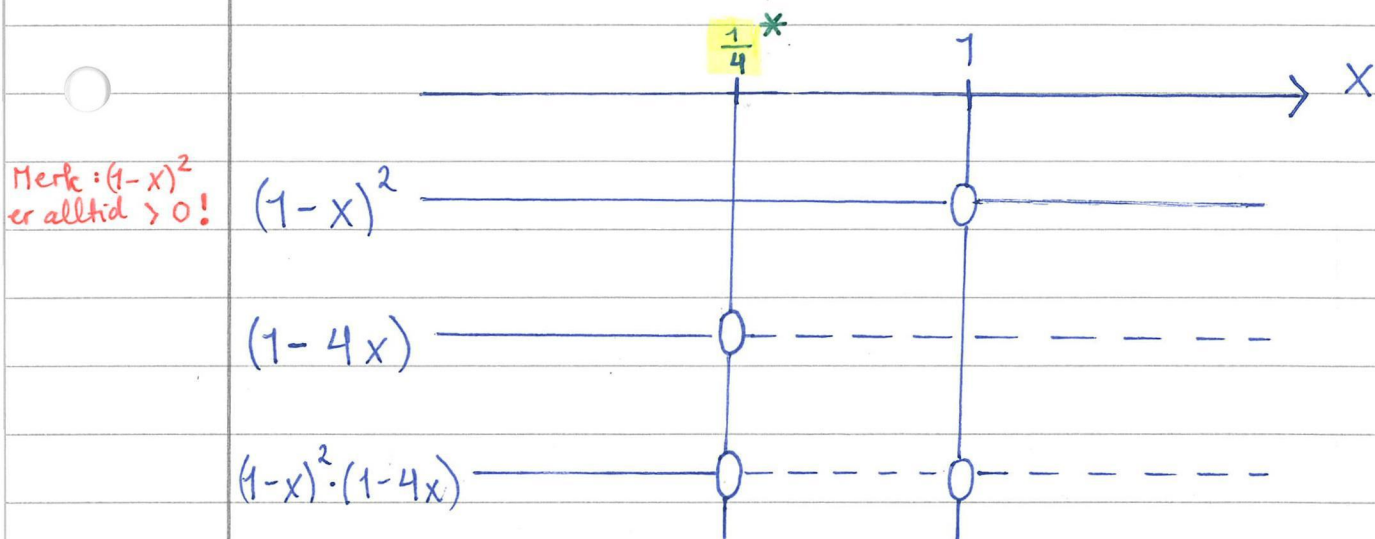
Merk at $(1-x)^2$ inngår i begge leddene og er dermed en felles faktor. Trekker denne ut foran en parentes.

$$(1-x)^2 [(1-x) - 3x] > 0$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 (1-x-3x) > 0$$

$$\Rightarrow (1-x)^2 (1-4x) > 0$$

Steg 2: Sette uttrykket på et fortegnssdiagram



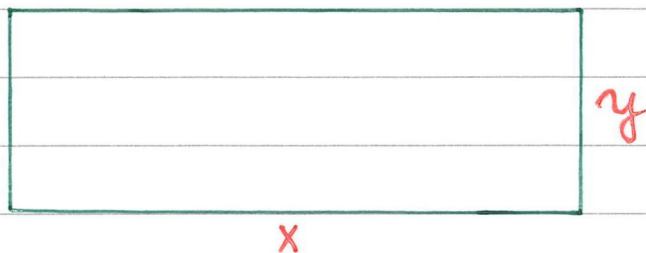
$$\begin{aligned} * \quad 1 - 4x &= 0 \\ 1 &= 4x \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ulikheten er tilfredsstilt når $x \in (-\infty, \frac{1}{4})$,
 eller når $x < \frac{1}{4}$.

$\downarrow$
 minus uendelig

Oppgave 10

Sidene i rektangelet er to ukjente. Kaller de for x og y .



Vi vet at:

$$A = 80 \text{ cm}^2$$

$$O = 37,8 \text{ cm}$$

Av opplysningene over kan jeg sette opp følgende ligningssett:

$$A = x \cdot y \Rightarrow 80 = x \cdot y$$

$$O = 2x + 2y \Rightarrow 37,8 = 2x + 2y \quad | :2$$

$$\Rightarrow 18,9 = x + y$$

Ligningssettet med to ukjente blir da:

$$\textcircled{1} \quad x \cdot y = 80$$

$$\textcircled{2} \quad x + y = 18,9$$

Bruker $\textcircled{2}$ for å løse for y :

$$y = 18,9 - x$$

Setter så $\textcircled{2} \rightarrow \textcircled{1}$ for å løse for x :

$$\textcircled{1} \quad x \cdot y = 80$$

$$\Rightarrow x \cdot (18,9 - x) = 80$$

$$\Rightarrow 18,9x - x^2 = 80$$

$$\Rightarrow x^2 - 18,9x + 80 = 0$$

Braker nå ABC-formelen for å løse for x :

ABC-formelen :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot ac}}{2a}$$

Vi har at $a = 1$, $b = -18,9$, $c = 80$.

Da får vi at :

$$x = \frac{-(-18,9) \pm \sqrt{(-18,9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 80}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{18,9 \pm \sqrt{37,21}}{2} = \frac{18,9 \pm 6,1}{2}$$

$$\underline{x = 12,5} \quad \text{eller} \quad \underline{x = 6,4}$$

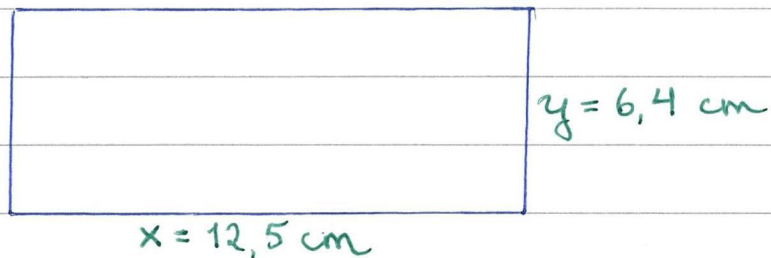
Finner til slutt tilhørende y -verdier.

$$\text{For } x = 12,5 \text{ er } y = 18,9 - 12,5 = \underline{\underline{6,4}}$$

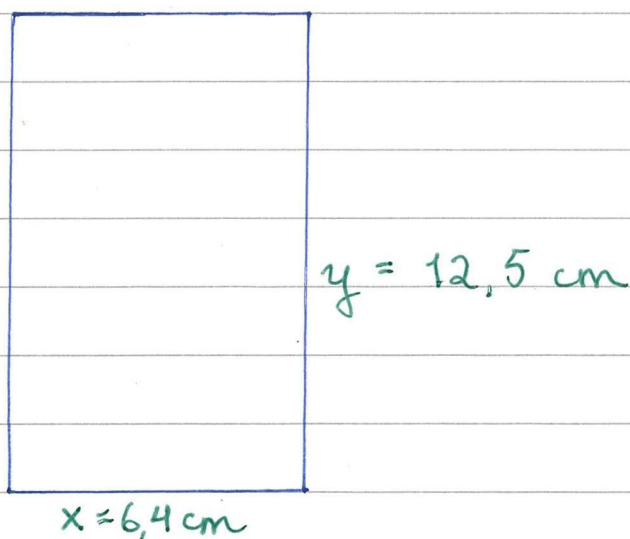
$$\text{For } x = 6,4 \text{ er } y = 18,9 - 6,4 = \underline{\underline{12,5}}$$

Vi har altså to løsninger, som illustrert under.

Løsning 1:



Løsning 2:



Oppgave 11

Vi har en kostnadsfunksjon

$$K(x) = ax^2 + bx + c$$

Vi vet at :

$$K(100) = 1500, \text{ dvs at kostnaden er lik } 1500 \text{ når } x=100.$$

$$K(200) = 2200, \text{ dvs at kostnaden er lik } 2200 \text{ når } x=200.$$

$$K(300) = 2700, \text{ dvs at kostnaden er lik } 2700 \text{ når } x=300.$$

Da vet vi at :

$$K(100) = a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c = 1500$$

$$K(200) = a \cdot 200^2 + b \cdot 200 + c = 2200$$

$$K(300) = a \cdot 300^2 + b \cdot 300 + c = 2700$$

Steg 1: Tre ligninger og tre ukjente (a , b og c)

$$\textcircled{1} 100^2 a + 100 b + c = 1500$$

$$\textcircled{2} 200^2 a + 200 b + c = 2200$$

$$\textcircled{3} 300^2 a + 300 b + c = 2700$$

Steg 2: Eliminerer c

Tips: For å eliminere c kan jeg ta ligning ② - ① og ligning ③ - ②. Må alltid gjøre samme regneoperasjon på alle ligningene!

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{2} - \textcircled{1}: & 200^2 a + 200 b + \cancel{c} & = 2200 \\ & - (100^2 a + 100 b + \cancel{c} = 1500) & \\ \hline & = 30000 a + 100 b & = 700 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{3} - \textcircled{2}: & 300^2 a + 300 b + \cancel{c} & = 2700 \\ & - (200^2 a + 200 b + \cancel{c} = 2200) & \\ \hline & = 50000 a + 100 b & = 500 \end{array}$$

Steg 3: Ligningssett med to ukjente (a og b)

$$\textcircled{i} \quad 30000 a + 100 b = 700$$

$$\textcircled{ii} \quad 50000 a + 100 b = 500$$

Steg 4: Eliminerer b og løser for a

$$\begin{array}{rcl} \textcircled{i} - \textcircled{ii}: & 30000 a + \cancel{100 b} & = 700 \\ & - (50000 a + \cancel{100 b} = 500) & \\ \hline & - 20000 a & = 200 \end{array}$$

$$a = \frac{200}{-20000} = \underline{\underline{-0,01}}$$

Steg 5 : Løser for b og c

$$\textcircled{ii} \quad 50\,000 \cdot \underbrace{(-0,01)}_a + 100b = 500$$

$$-500 + 100b = 500$$

$$100b = 1000$$

$$\underline{b = 10}$$

$$\textcircled{i} \quad 100^2 \cdot \underbrace{(-0,01)}_a + 100 \cdot \underbrace{10}_b + c = 1500$$

$$-100 + 1000 + c = 1500$$

$$c = 1500 + 100 - 1000$$

$$\underline{c = 600}$$

Kostnadsfunksjonen er dermed :

$$K(x) = \underbrace{-0,01x^2 + 10x}_\text{Variable kostnader} + \underbrace{600}_\text{Faste kostnader}$$

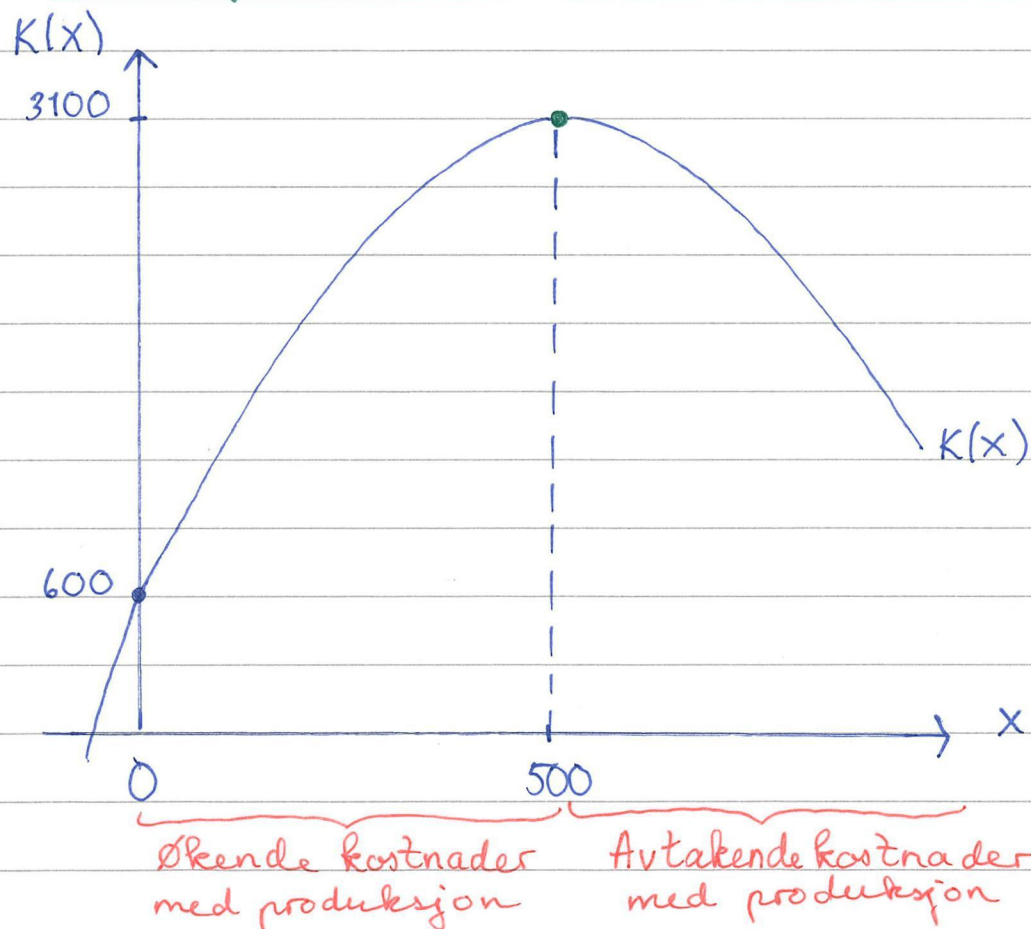
Variable kostnader :
Varierer med antall
enheter produsert
av varen (x).

Faste kostnader
Påløper uansett
hvor mange
enheter som
produseres.

Plotter $K(x)$ på kalkulator for å finne intervallet som er fornuftig å bruke til denne funksjonen.

Oppskrift: Tegne grafer på CASIO-kalkulator

Menu → **GRAPH** → Skriv inn funksjons-
uttrykk → **EXE**



Vi bør være betenkt med å bruke denne funksjonen når $x > 500$ da vi får avtakende kostnader. Det er dårlig realisme at totale kostnader avtar med produksjonen. Intervallet som gir mening å bruke er derfor $x \in [0, 500]$.