

Forkurs i matematikk

Oppgaver til dag 1

Oppgave 1

- 1a)
- 25 000 kr
 - $r = 0,025$ [$r = \text{rente}$]
 - $n = 5$ [$n = \text{antall år}$]

Etter 5 år har beløpet vokst til :

$$\begin{aligned} & 25\,000 \cdot \underset{1.\text{år}}{1,025} \cdot \underset{2.\text{år}}{1,025} \cdot \underset{3.\text{år}}{1,025} \cdot \underset{4.\text{år}}{1,025} \cdot \underset{5.\text{år}}{1,025} \\ & = 25\,000 \cdot 1,025^5 = \underline{\underline{28\,285,21 \text{ kr}}} \end{aligned}$$

Generelt : Vekstfaktor er gitt ved formelen
 $(1+r)^n$ der r er rente og n er antall år.

1b) Vi løser ligningen der n er ukjent :

$$25\,000 \cdot 1,025^n = 30\,000 \quad | \text{ deler på } 25\,000$$

$$1,025^n = \frac{30\,000}{25\,000}$$

$$1,025^n = 1,2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Løser for } n \text{ ved å ta } \ln \\ \text{på begge sider} \end{array} \right.$$

$$\ln(1,025^n) = \ln 1,2$$

$$\boxed{\text{Generelt: } \ln a^b = b \ln a}$$

Da får vi at:

$$n \ln 1,025 = \ln 1,2$$

$$n = \frac{\ln 1,2}{\ln 1,025} \approx \underline{\underline{7,38}}$$

Hvis vi regner med hele år tar det 8 år før beløpet har vokst til 30 000 kr.

1c) Vi løser ligningen der r er ukjent:

$$25\,000 \cdot (1+r)^5 = 30\,000 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Deler på } 25\,000 \end{array} \right.$$

$$(1+r)^5 = \frac{30\,000}{25\,000}$$

$$(1+r)^5 = 1,2 \quad \left| \begin{array}{l} \text{Opphøyer begge sider med } 1/5 \end{array} \right.$$

$$\left[(1+r)^5 \right]^{\frac{1}{5}} = [1,2]^{\frac{1}{5}}$$

$$1+r = 1,2^{\frac{1}{5}}$$

$$r = 1,2^{\frac{1}{5}} - 1$$

$$\underline{r \approx 0,0371}$$

Den årlige renten må være 3,71 % for at beløpet skal vokse til 30000 kr på 5 år.

Oppgave 2

2a)

Generelt: Hvis beløpet A står i banken i n år til årlig rente r , så vokser det til beløpet B , der vi har

$$B = A \cdot (1+r)^n$$

der $(1+r)^n$ er vekstfaktoren.

Vi løser ligningen med hensyn på A :

$$B = A \cdot (1+r)^n \quad | : (1+r)^n$$

$$A = \frac{B}{(1+r)^n}$$

Dette kan vi skrive videre som :

$$\underline{A = B \cdot (1+r)^{-n}}$$

$$\boxed{\text{Generelt : } \frac{1}{a} = a^{-1}}$$

2b) Vi løser ligningen med hensyn på r :

$$B = A \cdot (1+r)^n \quad | : A$$

$$(1+r)^n = \frac{B}{A} \quad | ()^{\frac{1}{n}}$$

$$\left[(1+r)^{\cancel{n}} \right]^{\frac{1}{\cancel{n}}} = \left[\frac{B}{A} \right]^{\frac{1}{n}}$$

$$1+r = \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{n}}$$

$$\underline{\underline{r = \left(\frac{B}{A} \right)^{\frac{1}{n}} - 1}}$$

2c) Vi løser ligningen med hensyn på n :

$$B = A \cdot (1+r)^n \quad | : A$$

$$(1+r)^n = \frac{B}{A} \quad | \text{ Tar ln på begge sider}$$

$$\ln[(1+r)^n] = \ln\left(\frac{B}{A}\right)$$

Husker nå på regelen: $\ln a^b = b \ln a$

Da får vi følgende:

$$n \ln(1+r) = \ln\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\boxed{\text{Generelt: } \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b}$$

$$n \ln(1+r) = \ln B - \ln A$$

Løser nå for n :

$$\underline{\underline{n = \frac{\ln B - \ln A}{\ln(1+r)}}}$$

Merk at

$$n = \frac{\ln\left(\frac{B}{A}\right)}{\ln(1+r)}$$

er et like godt svar.

Oppgave 3

3a) Tallene er henholdsvis :

Rangering:

5

$$0,03 \cdot 10^3 = 30$$

6

$$54 \cdot 10^0 = 54 \cdot 1 = 54$$

$$\text{Generelt: } X^0 = 1$$

1

$$-9,6 \cdot 10^5 = -960\,000$$

3

$$12\,345 \cdot 10^{-3} = 12,345$$

4

$$2,1 \cdot 10^1 = 21$$

2

$$-610 \cdot 10^{-1} = -61$$

↑ stigende rekkefølge får vi :

$$-9,6 \cdot 10^5 < -610 \cdot 10^{-1} < 12\,345 \cdot 10^{-3} < 2,1 \cdot 10^1 < 0,03 \cdot 10^3 < 54 \cdot 10^0$$

3b) Antas nå at $a > 1$ der a er et vilkårlig tall.

Tallene er henholdsvis :

Rangering:

2

$$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

$$\text{Generelt: } (X^a)^b = X^{a \cdot b}$$

1

$$a^{2+3} = a^5$$

$$\text{Generelt: } X^a \cdot X^b = X^{a+b}$$

3

$$a^{2^3} = a^{2 \cdot 2 \cdot 2} = a^8$$

2

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

4

$$a^{3^2} = a^{3 \cdot 3} = a^9$$

I stigende rekkefølge får vi:

$$a^{2+3} < (a^2)^3 = (a^3)^2 < a^{2^3} < a^{3^2}$$

Tips: Sett inn et vilkårlig tall for a større enn 1 og få ut tallverdiene. Eksempelvis $a = 2$. Da er det lettere å ordne tallene i stigende rekkefølge.

Merk: Jo høyere potens, jo høyere verdi får vi desom grunntallet er større enn 1.

3c) Antar nå at a befinner seg mellom 0 og 1, altså er $0 < a < 1$.

Setter at $a = 0,5$. Da får vi følgende:

Rangering:
3

$$(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3} = a^6 \Rightarrow 0,5^6 = 0,0156$$

4

$$a^{2+3} = a^5 \Rightarrow 0,5^5 = 0,0313$$

2

$$a^{2^3} = a^{2 \cdot 2 \cdot 2} = a^8 \Rightarrow 0,5^8 = 0,0039$$

3

$$(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6 \Rightarrow 0,5^6 = 0,0156$$

1

$$a^{3^2} = a^{3 \cdot 3} = a^9 \Rightarrow 0,5^9 = 0,002$$

I stigende rekkefølge får vi:

$$a^{3^2} < a^{2^3} < (a^3)^2 = (a^2)^3 < a^{2+3}$$

Merk: Nå får vi motsatt rekkefølge enn i 3 b.
Grunnen er at når vi multipliseres med tall mellom 0 og 1 blir produktet lavere. Jo høyere potens, jo flere ganger multipliserer vi med et tall mellom 0 og 1, og jo lavere verdi får vi.

Oppgave 4

4a)
$$\frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{a}$$

Generelt: $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$
$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

Da får vi følgende:

$$\frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot (a^2)^{\frac{1}{3}}}{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{-1} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1}$$

Nå må vi gjøre litt brøkregring. Fellesnevneren er $2 \cdot 3 = 6$. Ganger hvert ledd oppe og nede med

det tallet som gjør at vi får 6 i nevneren.

$$\frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} - \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 1}$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{6}{6} = \frac{3+4-6}{6} = \frac{1}{6}$$

Da får vi at :

$$a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1} = \underline{\underline{a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}}}$$

$$4b) \quad \frac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}}{a^2} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$$

$$= \frac{(a^2)^{\frac{1}{3}} \cdot (a^3)^{\frac{1}{2}}}{a^2} + \frac{a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{3}}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-2} + a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{3}}$$

$$= a^{\textcircled{1} \frac{2}{3} + \frac{3}{2} - 2} + a^{\textcircled{2} \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$$

$$= a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}} = \underline{\underline{2a^{\frac{1}{6}}}}$$

$$\text{Merk: } a^{\frac{1}{6}} + a^{\frac{1}{6}} = 2a^{\frac{1}{6}} \neq a^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}$$

$$a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}}$$

$$\textcircled{1} \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6} + \frac{9}{6} - \frac{12}{6}$$

$$= \frac{4+9-12}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$\textcircled{2} \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 2} - \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

4c)

$$\begin{aligned} & \sqrt{75} - \sqrt{12} - \sqrt{27} \\ &= \sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{3 \cdot 4} - \sqrt{3 \cdot 9} \\ &= \sqrt{5 \cdot 5 \cdot 3} - \sqrt{3 \cdot 2 \cdot 2} - \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3} \\ &= \sqrt{3 \cdot 5^2} - \sqrt{3 \cdot 2^2} - \sqrt{3 \cdot 3^2} \\ &= (\sqrt{3} \cdot \cancel{\sqrt{5^2}}) - (\sqrt{3} \cdot \cancel{\sqrt{2^2}}) - (\sqrt{3} \cdot \cancel{\sqrt{3^2}}) \\ &= (\sqrt{3} \cdot 5) - (\sqrt{3} \cdot 2) - (\sqrt{3} \cdot 3) \\ &= \underbrace{\sqrt{3}}_{\substack{\text{Felles} \\ \text{faktor}}} (\underbrace{5-2-3}_{=0}) = \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

Oppgave 5

Her er det kanskje ikke noe helt riktig svar, og det er sikkert mulig å finne eksempler hvor ordene blir brukt forskjellig.

Et uttrykk er bygget opp av en eller flere bokstaver og tall på en slik måte at når man setter inn tall for bokstavene, så blir uttrykket til et tall.

Eksempler:

$$y \quad x^2 \quad a+b \quad \frac{1}{x^2 + x + 1}$$

En ligning er et utsagn om at to uttrykk er like store, eller at et uttrykk er lik et tall.

Eksempler:

$$x^2 = 4$$

$$B = A \cdot (1+r)^n$$

En formel er en ligning der en bokstav er lik et uttrykk som ikke inneholder denne

Marit Helene Gladhaug, NHH

bokstaven. Formler brukes til å regne ut noe.

Eksempler:

$$y = x + 1$$

$$B = A \cdot (1+r)^n$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad [ABC\text{-formelen}]$$